

LABORATORI DE FÍSICA

Guions de Pràctiques
Curs 2011-2012



UNED
Centre Associat de Terrassa

Índice

Práctica	pág.
Medición y cálculo de errores	1
Constante elástica de un muelle helicoidal	15
Dinámica de la rotación. Momento de inercia	19
Descarga de un condensador	24
Resistencia interna de un voltímetro. FEM de una pila	29
Puente de Wheatstone	31

Medición y cálculo de errores

1. Introducción

Cuando asignamos un valor a una magnitud física realizamos un proceso de medición. La medición consiste en comparar el valor de una magnitud con un patrón establecido para la misma, y como resultado de la medida obtenemos un número que indica el número de veces que “cabe” el patrón en la magnitud a determinar, que se acompaña del patrón utilizado. Por ejemplo, cuando decimos que la altura de una mesa es $h = 105$ cm, decimos que la distancia del suelo a la superficie de la mesa contiene 105 veces el cm, patrón de longitud que estamos utilizando.

En general, los valores numéricos que asignamos a las magnitudes físicas son aproximados, es decir se hallan afectados por errores, que pueden proceder del proceso de medida en sí y de imprecisiones que se comenten al calcular a partir de otras medidas (errores de redondeo, por truncar valores, por desestimar términos de orden pequeño, etc).

Como ejemplo de error imputables al proceso de medida, podemos ver que si pesamos un objeto con la balanza de un comercio próximo, que suele tener una precisión de 5 g, y obtenemos una pesada de 335 g, sólo podemos afirmar con seguridad que el peso de nuestro objeto está en el intervalo comprendido entre 330 y 340 g. Si a continuación procedemos a pesar el objeto en una balanza de laboratorio, de una precisión de 1 mg, podríamos afinar más nuestra pesada y obtener un valor de, por ejemplo, 336.243 g. De esta forma ahora podremos asegurar que el valor del peso que queremos determinar está dentro del intervalo limitado por 336.242 y 336.244 g. Cuanta mayor resolución tenga la balanza que utilicemos, más cercano será el valor obtenido al *valor cierto*, pero éste será inalcanzable, será una idealización.

Además, si repetimos una medida con un instrumento con suficiente resolución, observaremos que el valor que obtenemos sufre fluctuaciones. Estas fluctuaciones también se deben a errores inherentes al proceso de medida cuyas causas pueden agruparse en dos grandes grupos.

- **Errores sistemáticos:** son aquellos que podemos atribuir a una causa determinada y, por lo tanto, conocemos como influyen sobre la magnitud a medir. Son comunes los errores observacionales (como los de paralaje en los instrumentos de aguja y dial, debido a malas prácticas de medida), errores de cero en los instrumentos, los errores teóricos que proceden de aproximaciones en las expresiones utilizadas en los cálculos, etc. Estos errores hacen que los valores medidos se alejen del valor verdadero en el mismo sentido (obedecen a una *sistemática* determinada).
- **Errores accidentales:** Aunque pongamos el máximo cuidado en la realización de las medidas, y evitemos toda fuente de error sistemático, veremos que las medidas que obtenemos sufren pequeñas fluctuaciones en ambos sentidos, de manera imprevisible en torno a un valor central, cuyas causas no son determinables.

2. Indices de error

Pensemos que si conociésemos el valor exacto de una magnitud o el error cometido al determinarla, podríamos deducir el error cometido o el valor exacto de la magnitud respectivamente. Por ello, los

errores en la medida hacen que este *valor cierto* de la magnitud sea una idealización. Sin embargo hemos de fijar una forma, que nos permita expresar el valor de una magnitud. Veremos que, al final, lo que daremos como resultado de la medida es un intervalo centrado en cierto valor y con cierto radio, dentro del cual tenemos una probabilidad determinada de que se halle el *valor cierto*.

Si suponemos conocido el *valor cierto* de una magnitud y lo denominamos como $\langle x \rangle$, podemos expresar la desviación de la magnitud medida respecto a dicho valor de dos formas diferentes:

- **Error absoluto:** como la diferencia entre el valor medido y el *valor cierto*

$$\epsilon = x - \langle x \rangle$$

Es una cantidad con las mismas unidades que la magnitud medida y su signo indica si el error es por exceso (positivo) o por defecto (negativo)

- **Error relativo:** es un índice adimensional que indica cuantas veces cabe en la unidad de medida el error absoluto que se ha cometido

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{x}$$

si se multiplica por 100, se tiene el porcentaje de error relativo.

Hay que destacar que el error absoluto no da una idea de la importancia del error cometido frente al valor de la magnitud medida. Por ejemplo, determinamos tres distancias con el mismo error absoluto de 1 cm. Sin embargo, como se muestra en la siguiente tabla, la importancia relativa del error es diferente en los tres casos

$\langle x \rangle$ (m)	ϵ (cm)	ϵ_r	ϵ_r (%)
1	1	0.01	1
10	1	0.001	0.1
1000	1	0.00001	0.001

3. Cifras significativas

A la hora de representar una magnitud, las cifras que utilizemos habrán de ser indicativas de la precisión con la que la hemos determinado. Esta representación se puede hacer de manera implícita, es decir, utilizando todas las cifras exactas y dejando como cifra menos significativa la cifra aproximada de valor posicional más alto. También su representación se puede hacer de manera explícita, es decir, expresando el valor de la magnitud y el del error que contiene. Los siguientes ejemplos pueden ayudar a entender ambas formas de representación:

<i>valor</i>	error	rep. explícita	rep. implícita
11345.65	6.78	11345 ± 7	11345
0.2327	0.0118	$0,233 \pm 0,012$	0.23
0.2383	0.0118	$0,238 \pm 0,012$	0.24
0.1230	0.00071	$0,1230 \pm 0,0007$	0.123

Nótese que se han redondeado los valores, y que, en el caso de que la cifra de valor significativo más alto del error sea un 1, se puede dar el error en su forma explícita con dos cifras.

4. Medidas que se pueden repetir n veces

Si tenemos un dispositivo de medida que permite repetir un gran número de veces (n) la medida, nos permitirá obtener una muestra de la infinidad de valores que puede tomar la magnitud a medir (población). Si representamos la frecuencia relativa (número de veces que aparece un valor dividido por el número total de medidas) frente al valor (función de distribución), observaremos que nuestras medidas se agrupan en torno a un valor cuya frecuencia de aparición es máxima. En el caso de que nuestro proceso de medida sólo esté afectado por errores de tipo aleatorio (esté libre de error sistemático), el teorema de Lyapunov nos dice que la función de distribución no difiere sensiblemente de la distribución normal o gaussiana.

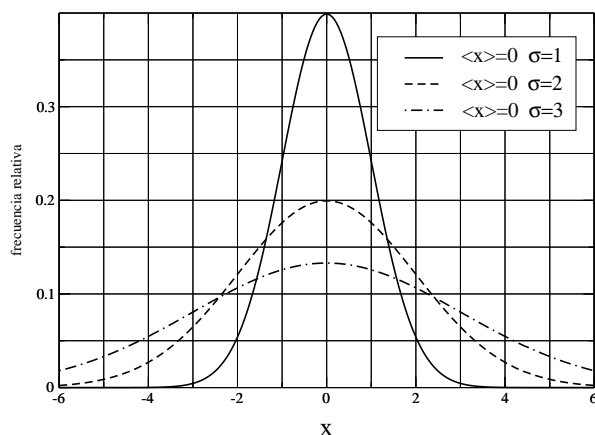


Figura 1: Forma de una distribución normal

La forma de la función de distribución gaussiana viene dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}$$

que se caracteriza porque tiene su máximo en $x = \langle x \rangle$, es simétrica respecto a dicho máximo, y tal como la hemos expresado se halla normalizada, por lo que el área que encierra sobre todo el eje x de los valores de la magnitud da la unidad. Hemos de notar que los puntos de inflexión de la curva se hallan en $x = \langle x \rangle \pm \sigma$ y que a medida que $x - \langle x \rangle$ crece respecto a σ la función decrece rápidamente.

En la figura 1 se muestra tres distribuciones con $\langle x \rangle = 0$, pero con diferentes valores de σ

Vemos que los valores se agrupan en torno al valor más probable y que el parámetro σ es un indicador del grado de dispersión de las medidas. Como el área está normalizada, si σ es pequeño la curva será alta y estrecha (poca dispersión), indicando que los valores que difieren ligeramente del más probable aparecen con mucha menos frecuencia que éste. En el caso de que σ sea grande (gran dispersión), la curva es ancha y aplanada, de manera que valores que difieren significativamente del más probable aparecen con frecuencias relativamente altas si las comparamos con la del valor más probable.

Esto quiere decir que en la distribución de valores que resulta de una muestra afectada únicamente por errores aleatorios, hay un valor más probable $\langle x \rangle$ (que aparece con mayor frecuencia). Este valor

coincide con la media aritmética de la muestra:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n x_i$$

Por otro lado, el parámetro que rige la dispersión de la muestra, σ , es la desviación estándar de la misma.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n}}$$

De momento hemos caracterizado la muestra mediante su valor central y su desviación estándar, pero no hemos considerado la incertidumbre en el valor central. Para ello deberíamos obtener un conjunto de muestras y a partir de dicho conjunto calcularíamos su valor medio y su desviación estándar, que denominaremos error estándar de la media $\sigma_{\langle x \rangle}$. La relación entre el error estándar de la media y la desviación estándar de la muestra es:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teniendo en cuenta que al imponer que el valor medio de nuestra muestra coincida con el *valor verdadero* de la medida reducimos en 1 el número de grados de libertad de la muestra (de los n valores, tenemos $n - 1$ independientes), resulta que a partir de los valores de la muestra el error estándar de la media se puede escribir

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n - 1)}}$$

Así, finalmente podremos dar como resultado de la medida el valor más probable de la muestra (su media aritmética) y como indicador de error la cantidad

$$\varepsilon_x = F \sigma_{\langle x \rangle}$$

los cuales fijan el intervalo

$$x = \langle x \rangle \pm \varepsilon_x$$

dentro del cual el *valor cierto* de la medida se encuentra con cierta probabilidad. En esta expresión, F es la función de Student que depende del número de medidas n y de la probabilidad con la que fijamos el *valor cierto* dentro de dicho intervalo. Para una probabilidad del 95.5%, los valores de F en función del número de medidas son:

n	F	n	F	n	F
2	12.706	7	2.447	14	2.160
3	4.303	8	2.365	16	2.131
4	3.183	9	2.306	18	2.110
5	2.776	10	2.262	20	2.093
6	2.571	12	2.201	∞	1.960

Como ejemplo de la forma de operar en estos casos, supondremos que hemos medido el diámetro exterior de una tubería, d con un pie de rey. Para ello, hemos repetido la medida 10 veces, obteniéndose los siguientes valores:

d (cm)	10.22	10.20	10.16	10.22	10.18	10.22	10.16	10.20	10.22	10.24
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Con la muestra obtenida construiremos la siguiente tabla, en la que la primera columna contiene los valores de las medidas obtenidas y en el orden en el que éstas se han realizado. Al final de la columna,

obtendremos el *valor cierto* de la medida como la media de los valores, es decir, sumando los valores obtenidos, y dividiendo la suma por el número de medidas. En la segunda columna pondremos las desviaciones de cada uno de los valores medidos respecto del *valor cierto* (valor medio o más probable). Esta magnitud representa el error absoluto de cada una de las medidas. En la tercera columna pondremos los valores del cuadrado del error absoluto de cada una de las medidas. Así al final de esta columna, sumando todos los valores de la misma, dividiendo este resultado por $n(n - 1)$, donde n es el número de medidas, y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene el error estándar de la media.

Aplicado al caso anterior, resulta

d_i (cm)	$(d_i - \langle d \rangle)$ (cm)	$(d_i - \langle d \rangle)^2$ (cm) ²
10.22	0.018	$2,24 \times 10^{-4}$
10.20	0.002	$0,04 \times 10^{-4}$
10.16	-0.042	$1,76 \times 10^{-4}$
10.22	0.018	$2,24 \times 10^{-4}$
10.18	-0.022	$4,84 \times 10^{-4}$
10.22	0.018	$2,24 \times 10^{-4}$
10.18	-0.022	$4,84 \times 10^{-4}$
10.20	0.002	$0,04 \times 10^{-4}$
10.22	0.018	$2,24 \times 10^{-4}$
10.24	0.038	$1,44 \times 10^{-4}$
$\langle d \rangle = 10.202$ cm		$\sigma_{\langle d \rangle} = 0.0087$ cm

como tenemos que $n = 10$, resulta que $F(10) = 2.262$ y la medida

$$d = \langle d \rangle \pm \varepsilon_d$$

donde $\varepsilon_d = F\sigma_{\langle d \rangle}$, tiene un valor

$$d = 10,20 \pm 0,02 \text{ cm}$$

Nótese que hemos utilizado el error probable de la magnitud, ε_d , para acotar el número de cifras significativas del resultado.

Destaquemos que el hecho de haber tabulado las medidas en el orden en el que se han tomado nos permite detectar posibles fuentes de error en el proceso de medida, ya que, si las medidas sólo se hallan afectadas de errores aleatorios, la segunda columna, que muestra la desviación de las medidas respecto del valor más probable, tendrá valores distribuidos aleatoriamente en torno al cero. Si los valores de dicha columna mostrasen cierta tendencia (un crecimiento o decrecimiento continuado de los valores) indicaría que en nuestro proceso de medida tenemos una fuente de error sistemático que hemos de analizar.

5. Medidas que sólo se pueden realizar una vez

En las situaciones en las que la medida de magnitud sólo pueda realizarse una vez, no tendremos una muestra de la que obtener la información estadística que hemos mostrado en la sección anterior. Esta situación no es la más conveniente, por lo que sólo se practicará cuando no sea posible obtener una muestra suficientemente amplia debido a limitaciones temporales (la medida es excesivamente larga),

económicas (cada medida implica un coste muy alto), materiales (la medida comporta la destrucción de la muestra), etc.

En este caso supondremos que la medida que hemos obtenido es el valor verdadero (*valor medido = valor verdadero*) y que la precisión con la que hemos determinado el valor es la del instrumento de medida utilizado.

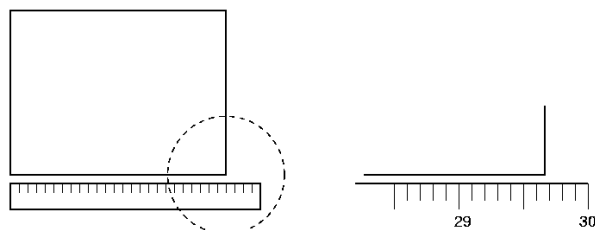


Figura 2: Medida de la longitud de una hoja de papel

Por ejemplo, consideremos el caso en el que se ha medido la longitud, l , de una hoja de papel DIN-A4 con una regla milimetrada. Para ello pondríamos la regla al lado de la hoja de papel y nos encontraríamos la situación descrita en la figura 2. Vemos que en la longitud de la hoja, cabe el patrón de medida (el milímetro) 296 veces más una fracción. La resolución del instrumento no permite obtener un mayor número de cifras significativas. Sin embargo, nuestra apreciación permite determinar que la marca correspondiente a 297 mm se halla más próxima al límite de la hoja, y por ello diremos que la longitud de la hoja es de 297 mm. Como la resolución del instrumento es de 1 mm, el resultado de la medida será

$$l = 297 \pm 1 \text{ mm} = 29,7 \pm 0,1 \text{ cm}$$

Nótese que el hecho de cambiar las unidades con las que hemos representado la magnitud no implica ningún cambio en el número de cifras significativas. Finalmente, diremos que en el ejemplo descrito hubiera sido fácil repetir la medida varias veces con el fin de obtener una muestra, por lo que su elección ha sido meramente ilustrativa del procedimiento a seguir en estos casos, y no un ejemplo de medida que sólo se pueda realizar una vez.

6. Medidas indirectas

En muchos casos la determinación del valor de una magnitud no se realiza comparando su valor directamente con un patrón, ni mediante un instrumento que nos dé directamente su valor, sino que su valor se obtiene mediante una operación matemática sobre valores de magnitudes que sí se han determinado directamente. En este caso decimos que la magnitud medida es función de otras medidas o, equivalentemente, que el valor de dicha magnitud se obtiene indirectamente a partir del valor de otras.

Como ejemplo de medida indirecta tenemos la determinación del volumen de un paralelepípedo. Para ello determinamos directamente el valor de la longitud de cada una de sus tres aristas perpendiculares entre sí, comparandolas con el patrón, y finalmente obtenemos el volumen multiplicando el valor de la longitud de las tres aristas. Otro caso ilustrativo sería determinar el valor de una resistencia mediante un voltímetro en paralelo y un amperímetro en serie con ella, como se muestra en la figura 3. El voltímetro nos indica la diferencia de potencial entre sus extremos, mientras que el amperímetro indica la intensidad

que la recorre, de manera que el valor de la resistencia se puede obtener aplicando la ley de Ohm a los valores medidos

$$R = \frac{V}{I}$$

Vemos que el valor de R se obtiene indirectamente a partir del valor de V e I .

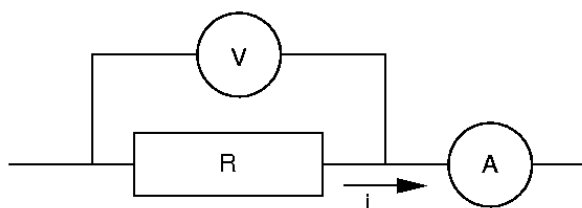


Figura 3: Medida del valor de una resistencia

Supongamos que queremos determinar el valor de una magnitud z , que es función de los valores de las s magnitudes $x_a, x_b \dots x_s$, y que estas magnitudes son independientes en nuestro proceso de medida. Podemos expresar z como cierta función f de las magnitudes x , de la forma $z = f(x_a, x_b, \dots, x_s)$ Nuestro objetivo es, por tanto, dar el *valor cierto* de z y su error.

Para ello tomamos una muestra (varias medidas) de cada una de las magnitudes que intervienen en el cálculo de z . Es decir, que nos encontraremos con s muestras. Cada una de estas muestras corresponde a una medida directa, y por tanto la trataremos como hemos mostrado en la sección correspondiente. Con ello, tendremos para cada magnitud x su valor cierto $\langle x \rangle$ y su error ε_x :

$$\begin{aligned} \langle x_a \rangle & \quad \varepsilon_{x_a} \\ \langle x_b \rangle & \quad \varepsilon_{x_b} \\ & \quad \dots \\ \langle x_s \rangle & \quad \varepsilon_{x_s} \end{aligned}$$

Finalmente el *valor cierto* de z , $\langle z \rangle$ se obtiene evaluando la función f con los valores más probables de las x , resultando

$$\langle z \rangle = f(\langle x_a \rangle, \langle x_b \rangle, \dots, \langle x_s \rangle)$$

El error en la determinación de z , ε_z , se obtiene mediante la correspondiente relación de propagación de errores

$$\varepsilon_z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_a}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_b}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_b}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)^2 \cdot \varepsilon_{x_s}^2}$$

Como ejemplo, determinaremos el valor de la resistencia que hemos considerado anteriormente. Hemos realizado la medida de los valores de la tensión y de la intensidad 10 veces, obteniendo los valores:

V (V)	10.22	10.20	10.16	10.22	10.18	10.22	10.16	10.20	10.22	10.24
I (A)	1.11	1.13	1.15	1.12	1.13	1.12	1.16	1.11	1.12	1.10

En primer lugar obtenemos el *valor cierto* y el error estándar en la media de las dos magnitudes que intervienen en la determinación de R :

$$\langle V \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = 10,202 \text{ V}$$

$$\sigma_{\langle V \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \langle V \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,0087 \text{ V}$$

y

$$\langle I \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = 1,125 \text{ A}$$

$$\sigma_{\langle I \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \langle I \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,0058 \text{ A}$$

Como en ambos casos $n = 10$, si damos el error en las magnitudes para una probabilidad del 95.5 %, $F(10)=2.262$ y

$$\varepsilon_V = F\sigma_{\langle V \rangle} = 2,262 \times 0,0087 = 0,0196 \text{ V}$$

$$\varepsilon_I = F\sigma_{\langle I \rangle} = 2,262 \times 0,0058 = 0,0131 \text{ A}$$

A continuación, calculamos el *valor cierto* de R , como:

$$\langle R \rangle = \frac{\langle V \rangle}{\langle I \rangle} = \frac{10,202 \text{ V}}{1,125 \text{ A}} = 9,0684 \Omega$$

Para determinar el error en R , ε_R , aplicamos

$$\varepsilon_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right)^2 \cdot \varepsilon_V^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot \varepsilon_I^2}$$

con

$$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} = \frac{1}{1,125 \text{ A}} = 0,8888 \text{ A}^{-1}$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} = -\frac{10,202 \text{ V}}{(1,125 \text{ A})^2} = -8,061 \text{ V A}^{-2}$$

Con los valores obtenidos, el error que buscamos vale

$$\varepsilon_R = \sqrt{0,8888^2 \times 0,0196^2 + 8,061^2 \times 0,0131^2} = 0,107 \Omega$$

Utilizando el error para acotar en número de cifras significativas, resulta

$$R = \langle R \rangle \pm \varepsilon_R = 9,07 \pm 0,11 \Omega$$

De manera práctica se puede utilizar la siguiente tabla para las expresiones que dan los errores de las magnitudes que se obtienen a partir de operaciones aritméticas sencillas.

$z = x_a \pm x_b \pm \dots \pm x_s$	$\varepsilon_z^2 = \varepsilon_{x_a}^2 + \varepsilon_{x_b}^2 \dots + \varepsilon_{x_s}^2$
$z = x_a^m \times x_b^n \times \dots \times x_s^q$	$\left(\frac{\varepsilon_z}{\langle z \rangle}\right)^2 = m^2 \left(\frac{\varepsilon_{x_a}}{\langle x_a \rangle}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\varepsilon_{x_b}}{\langle x_b \rangle}\right)^2 + \dots + q^2 \left(\frac{\varepsilon_{x_s}}{\langle x_s \rangle}\right)^2$

7. Ajuste por mínimos cuadrados

En ciertas ocasiones, no solo deseamos determinar el valor de una magnitud a partir de los valores de otras, sino que, además, queremos comprobar que existe una determinada relación entre las magnitudes medidas, las cuales se han de ajustar a cierto modelo teórico. Con gran frecuencia el modelo teórico predice una relación lineal entre las magnitudes.

Supongamos que de nuestro proceso de medida tenemos un conjunto de medidas de dos magnitudes x e y , es decir, una muestra de cada una de las magnitudes, que se han obtenido mediante el siguiente proceso: en el experimento se han fijado valores de la variable x a voluntad del experimentador y, para cada uno de ellos, se ha obtenido el correspondiente valor de la variable y . En la experiencia presentada x juega el papel de la variable independiente e y el de la variable dependiente (que se mide en función de x).

Para fijar el concepto, pensemos en el siguiente caso: deseamos determinar la constante elástica recuperadora de cierto muelle. Sabemos que dicha constante es el cociente entre la fuerza que aplicamos al muelle en sentido longitudinal y el alargamiento que le produce. Para determinarla, suspendemos el muelle verticalmente y colgamos de él una serie de pesas de diferente valor que le provocan diferentes alargamientos. En este caso la variable independiente es el valor de la pesa que colgamos, ya que la podemos escoger a voluntad entre los valores de los que dispongamos y la variable dependiente es el alargamiento que produce la pesa, ya que se mide en función del valor de ésta.

Podríamos obtener el valor de la constante mediante el cociente entre el peso aplicado y la deformación producida en cada caso. Esta forma de actuar supone que se verifica la ley de Hooke para el muelle, de manera que el alargamiento y el peso aplicado al muelle se relacionan mediante:

$$\Delta l = \frac{1}{k} F$$

donde Δl es el alargamiento, k es la constante y F la fuerza aplicada (el peso suspendido en nuestro caso). Esta expresión presupone una relación lineal entre la deformación y la fuerza, es decir, una relación de la forma

$$y = a + bx$$

en este caso la ordenada en el origen que preveemos es nula ($a = 0$) y la pendiente de la recta es el inverso de la constante elástica del muelle ($b = 1/k$)

Los parámetros a y b de la recta se han de ajustar, por lo tanto, de manera que se obtengan los valores óptimos. Estos valores óptimos se obtienen minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de y medidos y los valores de y calculados según la ecuación de la recta (regresión lineal). Se puede comprobar que en función de los valores medidos, los coeficientes a y b se escriben:

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{S S_{xx} - (S_x)^2}$$
$$b = \frac{S S_{xy} - S_xS_y}{S S_{xx} - (S_x)^2}$$

Los términos que aparecen en las expresiones anteriores son

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i} \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} \quad S_y = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$
$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

en los que (x_i, y_i) son los valores medidos y σ_i es el error en el valor de la variable independiente (en el caso de desconocer éste, supondremos que son todos iguales con lo que es equivalente a hacerlos igual a la unidad para los efectos del cálculo).

Para saber en que medida los valores obtenidos siguen la relación lineal propuesta, podemos recurrir a la representación gráfica de los valores (x_i, y_i) sobre papel milimetrado, donde, si el modelo es correcto, deberían de aparecer alineados sobre la recta de parámetros anteriormente calculados. A partir del coeficiente de correlación, podemos obtener también una indicación de la bondad del ajuste. El coeficiente de correlación es el factor adimensional

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle) (y_i - \langle y \rangle)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \langle y \rangle)^2}} \quad (1)$$

cuyos valores están comprendidos entre -1 y 1 . Los valores muy próximos a la unidad indican un buen ajuste y el signo indica el tipo de correlación: positiva si y crece con x y negativa si y decrece cuando x crece.

Como ejemplo realizaremos la determinación de la constante del muelle anterior. Colgaremos 6 pesas diferentes (x_i , $i = 1 \dots 6$) y mediremos los correspondientes alargamientos y_i , $i = 1 \dots 6$. Presentamos los valores convenientemente tabulados para realizar los cálculos

x_i (N)	y_i (cm)	x_i^2 (N ²)	y_i^2 (cm ²)	$x_i y_i$ (N cm)
1.1	6.5	1.21	42.25	7.15
1.9	9.3	3.61	86.49	17.67
3.1	12.6	9.61	158.76	39.06
3.8	15.2	14.44	231.04	57.76
5.1	18.5	26.01	342.25	94.35
6.1	21.6	37.21	466.56	131.76
$S_x = 21,2$	$S_y = 83,7$	$S_{xx} = 92,09$	$S_{yy} = 1327,35$	$S_{xy} = 347,75$

De forma que

$$a = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{S_{xx} - (S_x)^2} = 3,45 \text{ cm}$$

$$b = \frac{S_{xy} - S_x S_y}{S_{xx} - (S_x)^2} = 2,98 \text{ cm N}^{-1}$$

Finalmente, como la pendiente b es el inverso de la constante elástica del muelle, resulta $k = 1/b = 0,335 \text{ N cm}^{-1}$.

En la figura 4 se ve que la representación de los datos (símbolos) se ajusta bien a la recta de regresión obtenida (en trazo continuo). Efectivamente, el coeficiente de correlación en este caso da $r = 0,99991$.

Un procedimiento práctico para trabajar es realizar la representación gráfica de los puntos experimentales cuidadosamente sobre papel milimetrado y ajustar la recta, aproximadamente, con una regla sobre los puntos. A partir de la representación se puede obtener los coeficientes de la recta, ya que a es la ordenada en el origen (punto 3 en la figura 4). La pendiente b se puede obtener fijando las coordenadas de dos puntos sobre la recta (en el ejemplo los puntos 1 y 2) y realizando el cociente incremental:

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

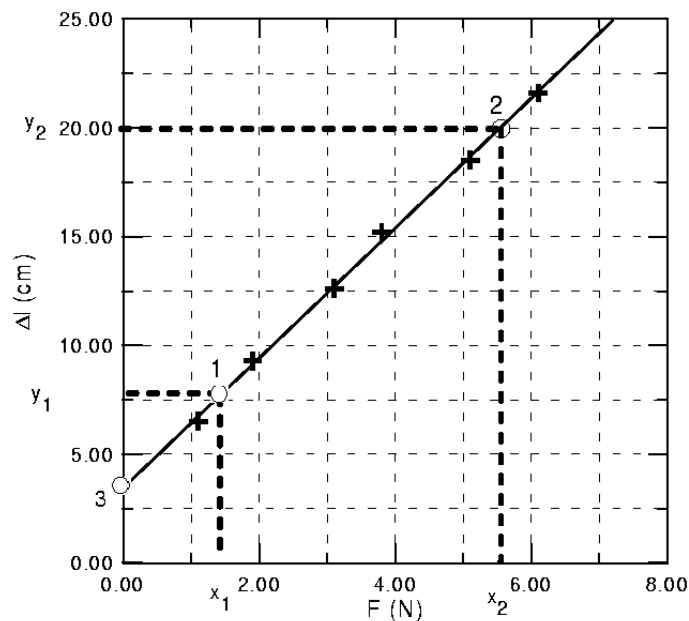


Figura 4: Representación gráfica de la experiencia del alargamiento del muelle

8. Representación gráfica de medidas

En muchas de las prácticas propuestas, se pide que se realice la representación gráfica de los resultados obtenidos. El objeto de dichas representaciones es ver tendencias y comportamientos que relacionan las variables medidas. Estas representaciones pueden ser el principio de un proceso de regresión lineal para determinar el valor de alguna magnitud, según se ha mostrado en la sección anterior, pero en todos los casos la representación lineal supone una presentación clara de los resultados obtenidos.

En aras de esta claridad, se ha de seguir unas normas que facilitan tanto la interpretación de los resultados como su manipulación. Las representaciones en el laboratorio se harán sobre papel milimetrado, o bien empleando una aplicación informática adecuada para gráficos científicos.

En el caso de que las representaciones se hagan manualmente se seguirán algunas convenciones para conseguir la claridad propuesta. Muchas de estas convenciones se pueden ver en la figura 4:

1. En el eje de abscisas (eje x) se representará la variable dependiente y, en el de ordenadas (eje y) la variable independiente.
2. La gráfica llevará un título indicativo y el nombre de sus autores para identificarla.
3. En los ejes se indicarán la magnitudes representadas y sus unidades.
4. Las escalas se fijarán de manera que la gráfica ocupe la máxima superficie del papel utilizado, y no se aprovecharán los bordes de la superficie milimetrada para poner los ejes.
5. En las escalas no se indicarán los valores medidos, sino etiquetas con múltiplos sencillos de la unidad propuesta: múltiplos de 1, 2, 5, 10 o combinaciones de estos (10, 25, 50, etc)
6. Los puntos correspondientes a las medidas se indicarán con claridad mediante símbolos. Su pueden usar diferentes símbolos y/o colores para representar sobre los mismos ejes datos procedentes de

mediciones en diferentes condiciones.

En el mercado existen además del papel milimetrado normal, papel semilogarítmico (log-lin, con una escala logarítmica y otra lineal) y doble logarítmico (log-log, con las dos escalas logarítmicas), si bien el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas hacen su uso menos frecuente.

Con estos papeles se obtienen ventajas, como las que ilustramos a continuación. Si en lugar de una relación lineal entre las magnitudes medidas, como la que hemos apuntado anteriormente, existe entre ellas una relación exponencial, de la forma

$$y = ae^{bx}$$

donde a y b son constantes a ajustar, y decidimos representarlo sobre un papel semilogarítmico, el gráfico obtenido es equivalente a:

$$\log y = \log a + \log e \, bx$$

es decir, si definimos $Y = \log y$, $A = \log a$ y $B = \log e \, b$, tenemos una relación de la forma

$$Y = A + Bx$$

(la ecuación de una recta). Mediante estas definiciones, podemos obtener los valores de a y b mediante regresión lineal, ya que la representación en dicho papel con y en el eje logarítmico y x en el lineal da lugar a una recta.

Al disponer de calculadora se puede representar sobre un papel milimetrado normal $\log y$ frente a x , obteniéndose el mismo resultado. Nótese que en este caso el uso del logaritmo natural facilita los cálculos ya que

$$\ln y = \ln a + bx$$

y la pendiente es directamente el coeficiente b .

El papel semilogarítmico es útil también en relaciones exponenciales con cualquier base $y = ab^x$, ya que tomando logaritmos resulta $\log y = \log a + \log b \, x$. El papel doble logarítmico permitirá linealizar relaciones de tipo potencial, como

$$y = ax^b$$

ya que $\log y = \log a + b \log x$. Nótese que en este caso, si se representa el $\log y$ frente a $\log x$, se obtiene una recta de pendiente b y término independiente $\log a$

Un ejemplo aclaratorio puede ser el estudio del diagrama pV de la transformación adiabática de un gas. La presión y el volumen se hallan relacionadas por $pV^\gamma = k$, donde k es cierta constante. Si estudiamos para cierto gas una transformación de este tipo, obtenemos los siguientes valores para el volumen y la presión correspondiente:

V (m ³)	p (Pa)
0.005	1.665106
0.007	1.039592
0.010	0.6309574
0.012	0.4888169
0.015	0.3576615
0.021	0.2233022

La representación gráfica de la presión del gas en función de su volumen (figura 5), muestra claramente que la relación entre ellos no es lineal ($p = kV^{-\gamma}$). Sin embargo, la representación de estas magnitudes

sobre escalas doblemente logarímicamente (log-log) muestra una recta ($\log p = \log k - \gamma \log V$), cuya pendiente es la constante adiabática del gas, γ , cambiada de signo (figura 6).

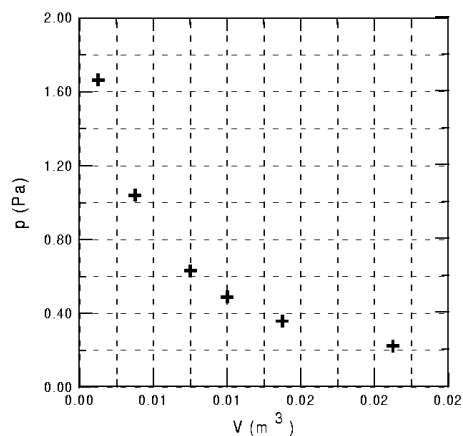


Figura 5: Representación gráfica del diagrama pV de cierto gas

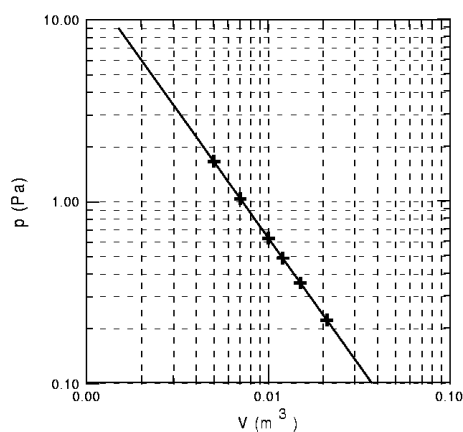


Figura 6: Representación gráfica del diagrama pV de cierto gas, en papel log-log

Constante elástica de un muelle helicoidal

1. Objetivo

Determinar la constante elástica de un muelle por los métodos estático y dinámico. Determinar la masa efectiva del muelle. Calcular g .

2. Material

Soporte con un muelle vertical, juego de pesas, escala métrica, cronómetro.

3. Fundamento teórico

3.1. Constante elástica de un muelle.

Cuando se cuelgan pesas del extremo inferior de un muelle metálico helicoidal sujeto por su extremo superior, se puede observar que experimenta un alargamiento. Dicho alargamiento es proporcional a la fuerza de tracción debida a las pesas, siempre que no se sobrepase el límite elástico del muelle (Ley de Hooke).

Si l_0 es la longitud antes de cargar ninguna pesa y l la longitud cuando lo sometemos a una determinada carga, el alargamiento viene dado por $\Delta l = l - l_0$. Según la ley de Hooke dicho alargamiento es proporcional a la fuerza de tracción a la que lo somete la carga: $F = k\Delta l$. La constante k es la que llamamos constante elástica o recuperadora del muelle.

3.2. Determinación de K por el método dinámico

Cuando suspendemos una masa m del extremo inferior del muelle, éste se alarga hasta que alcanza el equilibrio, en el que la fuerza recuperadora del muelle iguala al peso: $k\delta l = mg$, tal como se muestra en la figura 1.

Si ahora aplicamos una fuerza adicional se produce un nuevo alargamiento x . Al abandonar el sistema, la fuerza hacia arriba que ejerce el muelle sobre la masa es $k(\delta l + x)$, de modo que habrá una fuerza neta sobre la masa: $F = mg - k(\Delta l + x) = -kx$, donde hemos tomado el sentido positivo hacia abajo (figura 2). Por la segunda ley de Newton la ecuación de movimiento se escribe:

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

o reagrupando los términos en el primer miembro:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

que corresponde a la ecuación diferencial de un movimiento armónico simple, donde x es la posición de la masa medida desde la posición de equilibrio. El movimiento de la masa consistirá en oscilaciones

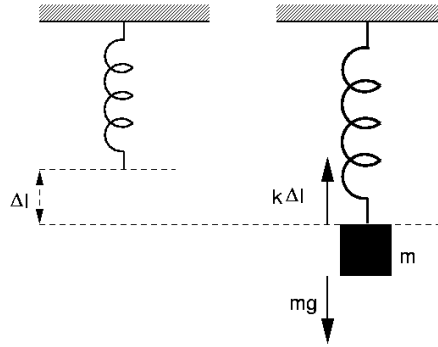


Figura 1: Alargamiento de un muelle por la suspensión de una masa en su extremo hasta alcanzar el equilibrio

armónicas de período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

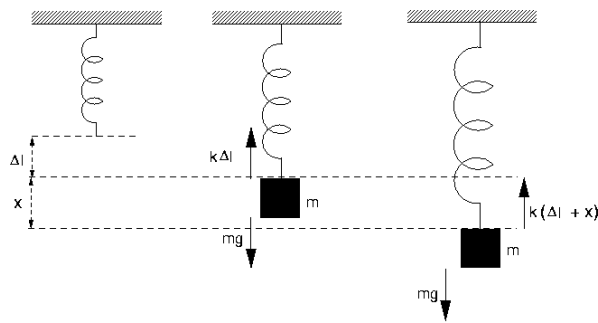


Figura 2: Alargamiento adicional x que hace que la masa quede fuera de equilibrio y comience a oscilar

Si repetimos la experiencia para diferentes valores de la masa suspendida y representamos los valores de los cuadrados de los períodos obtenidos frente a la masa obtendremos una relación de la forma:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m \quad (4)$$

es decir, una recta. De la expresión 4 vemos que de la medida de la pendiente de la recta podemos determinar el valor de la constante elástica k .

3.3. Masa efectiva del muelle (estudio dinámico)

En el apartado anterior hemos supuesto que la única masa que participa en el movimiento es la masa de la carga que colgamos del muelle (hemos asignado una masa nula al muelle). En el caso del estudio dinámico hemos de observar que el platillo soporte de las masas y el propio muelle, que no es de masa despreciable, participan del movimiento de oscilación. Por ello, debemos asignarles cierta masa (masa

efectiva: M_e) que habríamos de sumar a la masa de la pesa. De esta forma el período de las oscilaciones será:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M_e}{k}} \quad (5)$$

Si aislamos el cuadrado del período obtenemos una ecuación:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m + \frac{4\pi^2 M_e}{k} \quad (6)$$

que es una recta, cuya variable dependiente es T^2 y la independiente m . A partir de la pendiente de dicha recta podemos obtener k y de su término independiente M_e . La teoría predice que la masa efectiva de un muelle que realiza un movimiento oscilatorio armónico es un tercio de su masa. De esta forma, podemos expresar:

$$M_e = M_p + \frac{M_m}{3} \quad (7)$$

donde M_p es la masa del platillo soporte y M_m es la masa del muelle.

3.4. Determinación de la intensidad del campo gravitatorio terrestre

De la condición de equilibrio estático se deduce que $m = \delta lk/g$. Si en la ecuación 6 sustituimos la masa por la relación anterior obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \frac{k\Delta l}{g} + \frac{4\pi^2 M_e}{k} \quad (8)$$

de la que si despejamos Δl resulta:

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2} T^2 - \frac{gM_e}{k} \quad (9)$$

Por lo que, si representamos Δl frente a T^2 , obtenemos una recta a partir de cuya pendiente podemos calcular el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en nuestro laboratorio.

4. Método experimental

4.1. Determinación de K: método estático

Disponga la masa más pequeña sobre el platillo soporte y determine en la escala la posición de equilibrio. Las determinaciones de alargamientos se realizarán a partir de esta posición.

Aumente gradualmente el valor de la masa situada en el platillo y mida los alargamientos correspondientes. Anote los resultados en una tabla $m - \Delta l$.

4.2. Determinación de K y Me: método dinámico

Sitúe la masa menor sobre el platillo soporte y deje que alcance la posición de equilibrio. Desplace el platillo suavemente hacia abajo y suéltelo después.

Deje que la masa efectúe algunas oscilaciones y cronometre el tiempo que tarda en realizar un número determinado de oscilaciones (por ejemplo 10). Obtenga el valor del período (tiempo que tarda en realizar una oscilación completa)

Repita el proceso para distintas masas y anote los resultados en una tabla $m - t_{10} - T - T^2$.

4.3. Determinación de g

A partir de los datos experimentales de los apartados anteriores, construya una nueva tabla $m-\delta l-T^2$.

5. Resultados

5.1. Método estático

Represente gráficamente Δl frente a m . Ajuste una recta a los valores experimentales y calcule k a partir de la pendiente de la recta.

5.2. Método dinámico

Represente gráficamente T^2 frente a la masa. Ajuste una recta a los puntos experimentales. A partir de la pendiente y del término independiente de la recta calcule k y M_e .

5.3. Cálculo de g

Represente gráficamente Δl frente a T^2 . Ajuste una recta a los puntos experimentales y a partir de la pendiente calcule el valor de g .

Dinámica de rotación. Momento de inercia

1. Objetivo

Determinar los momentos de inercia de un cilindro macizo y uno hueco. Estudiar como depende el momento de inercia de la distribución de masa en torno al eje de rotación.

2. Material

Soporte de hierro, eje con polea, pesa de latón de $50,0 \pm 0,1$ g, 2 masa cuadradas de 275 ± 5 g, cilindro macizo de 1380 ± 5 g, cilindro hueco de 1425 ± 5 g, barra de aluminio de 575 ± 5 g, hilo, cronómetro, cinta métrica, regla graduada, pie de rey.

3. Fundamento teórico

El momento angular, \vec{L}_o y la velocidad angular de un sólido rígido ω que gira en torno a un eje principal de inercia, con orientación fija en el espacio, son proporcionales entre sí, y ambas magnitudes tienen la dirección del eje de rotación. Esto se puede expresar mediante la relación

$$\vec{L}_o = I_o \vec{\omega} \quad (1)$$

en la que I_o , es el momento de inercia del sólido rígido respecto del eje que pasa por o . Derivando esta expresión respecto del tiempo tenemos que.

$$\vec{M}_o = I_o \vec{\alpha} \quad (2)$$

en la que \vec{M}_o , es el momento de las fuerzas aplicadas al sólido rígido respecto del eje que pasa por o y α es la aceleración angular del sólido. La ecuación 2 es formalmente análoga a la segunda ley de Newton, por lo que se le suele denominar ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Vemos entonces que, en el caso de las rotaciones, el momento de inercia juega un papel análogo a la masa inercial en el movimiento de traslación, y representa pues la *inercia del cuerpo a la rotación*.

El cálculo del momento de inercia se hace descomponiendo el cuerpo sólido en elementos infinitesimales de masa y sumando los momentos de inercia de cada uno de los elementos respecto del eje considerado. El momento de inercia de cada elemento es proporcional a su masa dm y al cuadrado de la distancia δ que lo separa del eje. Así, la contribución de cada elemento de masa al momento de inercia es

$$dI_o = \delta^2 dm \quad (3)$$

La suma de todas las contribuciones infinitesimales es la integral

$$I_o = \int_v dI_o = \int_v \delta^2 dm = \int_v \delta^2 \rho dv \quad (4)$$

donde ρ es la densidad volúmica de masa del cuerpo. Esta integral sólo será soluble, con relativa facilidad, en el caso de cuerpos con geometría sencilla o con un alto grado de simetría. Como veremos en esta práctica, la determinación del momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje, también puede hacerse de forma experimental.

4. Método experimental

Para la realización de la práctica monte el dispositivo representado esquemáticamente en la figura 1. El dispositivo consta de un soporte que sujeta un eje vertical fijo, que en su parte superior tiene una polea ligera de radio r que puede girar libremente sobre este eje mediante un cojinete. Sobre esta polea se puede enrollar un hilo ligero e inextensible, que también pasa por otra polea de eje horizontal. Al otro extremo del hilo se encuentra un disco de masa m . En la parte superior de la polea hay un dispositivo que permite fijar diversos cuerpos. Si estos cuerpos son homogéneos y tienen simetría respecto al eje vertical al que se hallan fijados, realizarán un movimiento de rotación baricéntrica en torno a él.

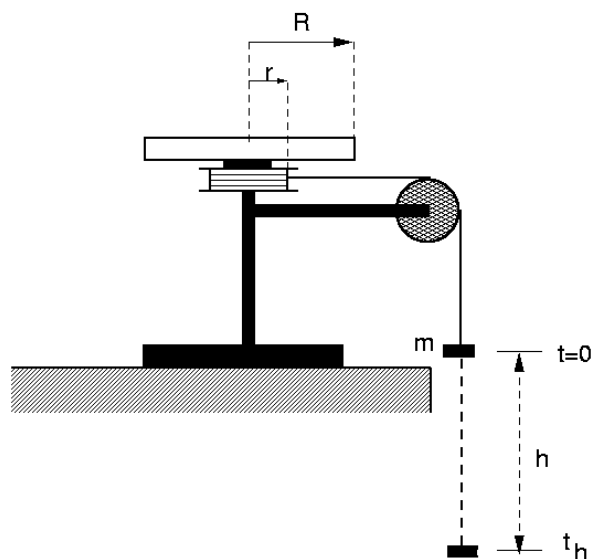


Figura 1: Esquema del dispositivo experimental

Supongamos que hemos fijado un cuerpo de momento de inercia I sobre la polea de eje vertical. Si dejamos caer desde el reposo el cuerpo de masa m que hay al extremo de la cuerda, ésta se desenrollará y hará girar la polea y el cuerpo que hemos fijado solidario con ella. Si T es la tensión que transmite el hilo, aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo que cae resulta:

$$mg - T = ma \quad (5)$$

donde a es la aceleración que adquiere el cuerpo.

El cuerpo que rota efectúa una rotación baricéntrica, siendo la tensión en el hilo T la única que ejerce momento respecto del eje. Según la ecuación fundamental de la dinámica de rotación tenemos

$$Tr = I\alpha \quad (6)$$

donde α es la aceleración angular que adquiere el cuerpo que rota. Ambos movimientos están ligados por la relación

$$a = r\alpha \quad (7)$$

donde a es la aceleración que adquiere el cuerpo.

Si sustituimos ahora el valor de α de la ecuación 7 en la ecuación 6, y el valor de T dado por 6 en la ecuación 5, podemos aislar el valor de la aceleración del cuerpo, resultando

$$a = \frac{mgr^2}{mr^2 + I} \quad (8)$$

Vemos que el cuerpo que cae realiza un movimiento uniformemente acelerado. Como dejamos caer este cuerpo desde el reposo, tardará un tiempo t_h en caer la altura h que hemos indicado en la figura 1, el cuál vendrá dado por

$$t_h = \frac{2h}{a} \quad (9)$$

Si sustituimos el valor de la aceleración que se obtiene de la ecuación 9 en la ecuación 8, y despejamos el momento de inercia de ésta, tenemos finalmente

$$I = mr^2 \left(\frac{gt_h^2}{2h} - 1 \right) \quad (10)$$

Vemos que la expresión obtenida nos permite determinar el momento de inercia del cuerpo que hemos fijado sobre la polea de eje vertical a partir del tiempo que tarda en caer un cuerpo de masa m una altura determinada h . Para ello deberá determinar en primer lugar la distancia h mediante dos marcas en el hilo y anotar su valor. Determine también el valor de la masa m y el radio de la polea. Para estas cantidades utilice la resolución del instrumento como error (considerándolas como medidas que sólo se pueden realizar una vez). Tome una muestra de como mínimo 6 valores del tiempo de caída del cuerpo de masa m y determine a partir de la muestra el *valor cierto* de t_h y su error. Finalmente mediante la ecuación 10 determine el valor del momento de inercia. La propagación de errores en medidas indirectas permitirá estimar el error en el momento de inercia.

En la realización de la práctica habra tres partes. En primer lugar determinará el valor del momento de inercia de un cilindro macizo I_m y su error mediante el procedimiento descrito para medidas indirectas y el montaje de la figura 1

En segundo lugar dispondrá sobre el cilindro anterior el cilindro hueco. como se muestra en la figura 2

Determine el momento de inercia del conjunto. Al ser el momento de inercia una magnitud aditiva, resultará que al momento de inercia del conjunto habrá de restar el momento de inercia del cilindro macizo, obtenido anteriormente, para obtener el momento de inercia del cilindro hueco I_h .

En tercer lugar va a estudiar como depende el momento de inercia con la distribución de la masa en torno al eje. Para ello tiene dos masas que se pueden fijar sobre una barra soporte. En primer lugar retire los cilindros del soporte y fije la barra, como se muestra en la figura 3. Determine el momento de inercia para al menos 6 distancias δ al eje de rotación diferentes. Como va a estudiar la tendencia de los valores, realice cada medida tan sólo una vez. Al acabar tendrá una tabla, donde figurará el valor del momento de inercia para cada uno de los 6 valores de δ .

5. Resultados

Determine el valor del momento de inercia del cilindro macizo y su error. Dada la masa del cilindro macizo y su radio, determine a partir de la expresión

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (11)$$

el momento de inercia que predice la teoría y compárelo con el resultado experimental.

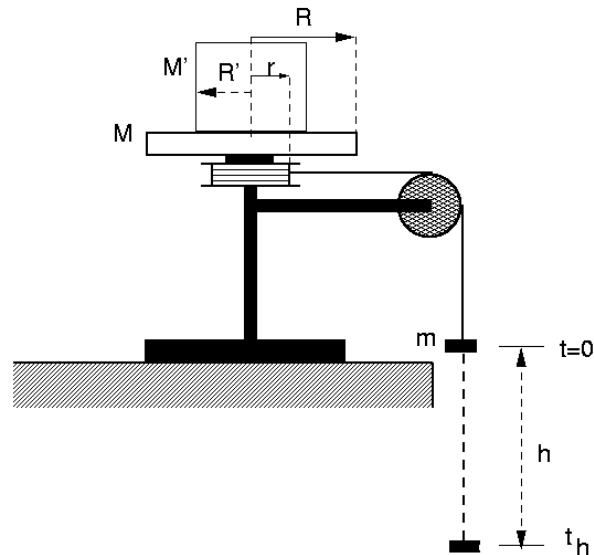


Figura 2: Esquema del dispositivo experimental

Determine el valor del momento de inercia del cilindro hueco y su error. Dada la masa de este cilindro y su radio, determine a partir de la expresión

$$I = MR^2 \quad (12)$$

el momento de inercia que predice la teoría y compárelo con el resultado experimental.

Para la tercera parte de la práctica, tendremos en cuenta que la teoría predice que el momento de inercia del conjunto barra-masas fijadas a ella vale

$$I = I_b + 2M\delta^2 \quad (13)$$

donde I_b es el momento de inercia de la barra y $M\delta^2$ el momento de inercia de cada una de las masas M cuando se las sitúa a una distancia δ del eje. A la vista de la ecuación, si representa gráficamente el momento de inercia I frente a δ^2 , obtendrá una recta de la que podrá obtener los valores de cada masa y del momento de inercia de la barra soporte, I_b , mediante regresión lineal. Compare los valores que ha obtenido para las masas con el dado y, finalmente, compare el valor del momento de inercia de la barra I_b con el que predice la teoría

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \quad (14)$$

donde M es su masa y L su longitud.

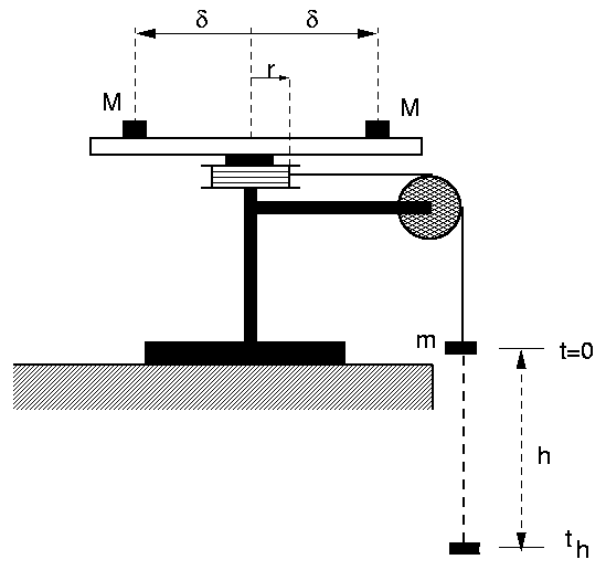


Figura 3: Esquema del dispositivo experimental

Descarga de un condensador

1. Objetivo

Determinar la capacidad de dos condensadores problema, el valor del condensador equivalente de la asociación en serie, y el valor del condensador equivalente de la asociación en paralelo.

2. Material

Fuente de alimentación, un multímetro digital, un cronómetro, 2 condensadores problema, 1 resistencia, un conmutador, varios cables de conexión.

3. Fundamento teórico

Los condensadores son dispositivos útiles para almacenar carga y energía, los cuales consisten en dos conductores próximos entre sí, pero aislados eléctricamente, y que cuando se carga el condensador adquieren cargas de igual magnitud y signo opuesto. El símbolo que se utiliza para representarlo en los esquemas eléctricos es el de la figura 1-a, que corresponde con la geometría de placas planas y paralelas. Los símbolos de las figuras 1-d y 1-e se emplean para representar condensadores electrolíticos y de capacidad variable respectivamente.

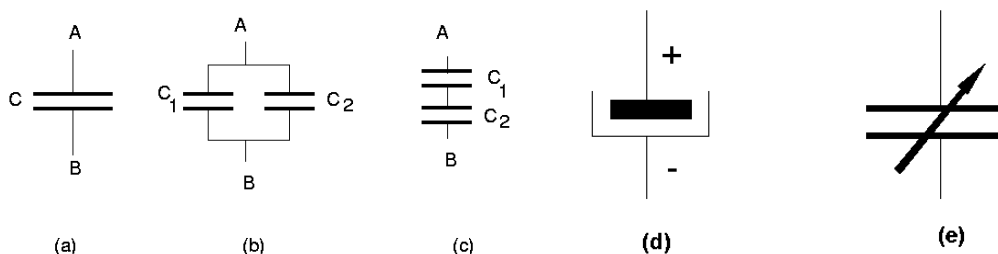


Figura 1:

En los condensadores la razón entre la carga Q , la magnitud de la carga que adquiere cada una de las placas, y la diferencia de potencial V que existe entre las placas es una constante C , la capacidad del condensador, que sólo depende de la geometría del mismo y del material que llena el espacio que hay entre los conductores. Así, la capacidad

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

es una medida de la capacidad del condensador de almacenar carga para una diferencia de potencial dada.

A menudo se utilizan asociaciones de dos o más condensadores en los circuitos eléctricos. Existen dos tipos de asociaciones básicas de condensadores, la asociación en paralelo (figura 1-b) y la asociación

en serie (figura 1-c). Dichas asociaciones pueden sustituirse por un único condensador (*condensador de capacidad equivalente*), cuya capacidad está dada respectivamente por las expresiones:

- $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$ (Asociación en paralelo)
- $\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (Asociación en serie)

3.1. Proceso de carga de un condensador

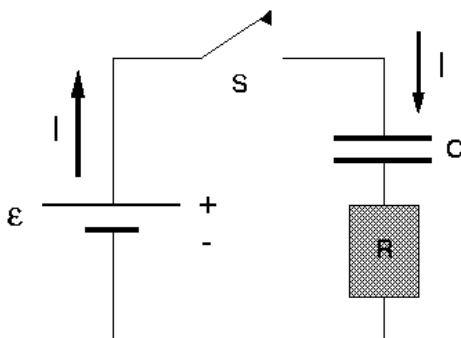


Figura 2: Carga de un condensador

Carguemos el condensador del circuito de la figura 2 cerrando el interruptor S . Si llamamos i a la intensidad que circula por el circuito y q a la carga que tiene el condensador en un instante t , tenemos que al cerrar el circuito las diferencias de potencial que aparecen entre los bornes de la resistencia, V_R , y del condensador, V_C , en un instante dado son respectivamente:

$$V_R = Ri \qquad V_C = \frac{q}{C} \qquad (2)$$

Por lo tanto, tenemos que.

$$\varepsilon = V_R + V_C = Ri + \frac{q}{C} \qquad (3)$$

Como la tasa de variación de la carga del condensador está dada por la corriente que circula por el circuito, resulta

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (4)$$

de manera la ecuación 3 se puede escribir:

$$\varepsilon C - q = RC \frac{dq}{dt} \qquad (5)$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene que la carga del condensador $q(t)$ es de la forma:

$$q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (6)$$

La representación de la carga en función del tiempo es la de la figura 3. Como puede verse en la figura 3, el producto $Q_f = \varepsilon C$ es la carga final que adquiere el condensador. Por otro lado, el producto $\tau = RC$ tiene dimensiones de tiempo, y recibe el nombre de *constante de tiempo* del circuito. El significado de ésta se puede entender si consideramos que cuando transcurre un tiempo $t = \tau$, la carga que tiene el condensador es:

$$q = Q_f \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,63Q_f \qquad (7)$$

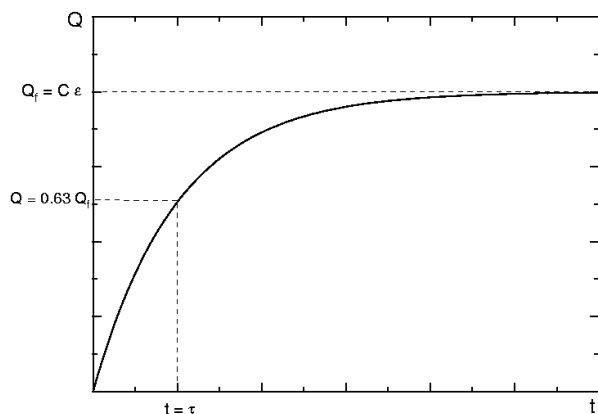


Figura 3:

es decir un 63 % de su carga final de equilibrio, independientemente del valor de ésta o de la tensión a la que se se cargue.

3.2. Proceso de descarga de un condensador

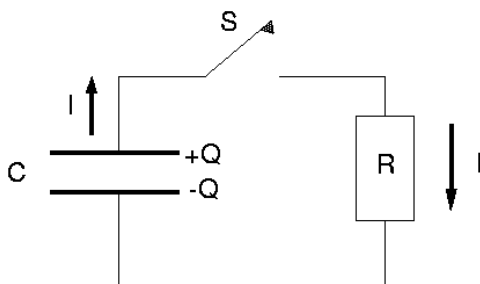


Figura 4: Descarga de un condensador

Supongamos ahora que tenemos un condensador de capacidad C cargado con una carga Q_0 que pretendemos descargar a través de una resistencia R cerrando el interruptor S , tal como se muestra en la figura 4. Sean nuevamente i y q la intensidad de la corriente y la carga del condensador en cierto instante t . En este caso, al cerrar el interruptor, las tensiones en el condensador y en la resistencia verifican:

$$V_R = V_C \quad Ri = \frac{q}{C} \quad (8)$$

Ahora, la tasa de variación de carga del condensador se puede escribir:

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad (9)$$

ya que la carga que circula por el circuito, resulta de la disminución de la carga del condensador.

De esta forma, combinando las ecuaciones 8 y 9, resulta:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \quad (10)$$

Integrando la ecuación anterior con la condición de que en el instante inicial la carga del condensador es Q_0 , obtenemos la expresión de la carga del condensador en función del tiempo, que viene dada por:

$$q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11)$$

cuyo aspecto es el que se muestra en la figura 5. Es fácil ver ahora que la constante de tiempo del circuito $\tau = RC$ es el tiempo que tarda en decaer la carga inicial del condensador en un 63%, esto es, a un 37% de su valor inicial.

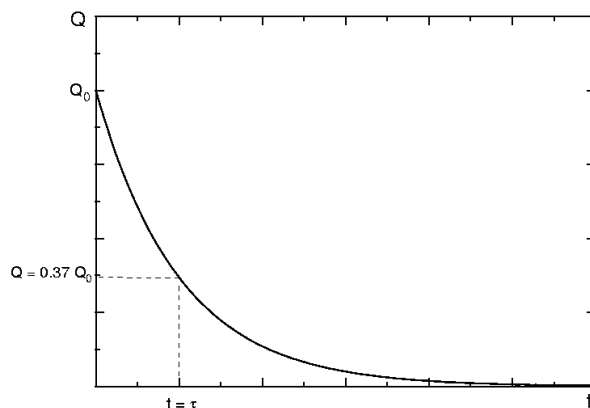


Figura 5:

4. Método experimental

Vamos a estudiar el proceso de descarga de los condensadores. En primer lugar estudiaremos la descarga de C_1 . Para ello, monte el circuito de la figura con los elementos de los que dispone, disponiendo el condensador C_1 en el lugar del condensador C . Note que se trata de un condensador electrolítico, por lo que habrá de comprobar antes de aplicar la tensión de la fuente de alimentación que la polaridad de las conexiones del condensador son las correctas.

Conecte la fuente de alimentación y regule la tensión de salida de la misma a 15 V. Cargue el condensador (para ello ponga el conmutador en la posición 1). Inicie la descarga del condensador (ponga el conmutador en la posición 2) a la vez que arranca el cronómetro. Anote en una tabla el valor de la tensión en los bornes del condensador en función del tiempo transcurrido. Haga una anotación cada 10 segundos hasta que el valor de la tensión haya caído a una cuarta parte del valor inicial.

Repita el proceso anterior para el condensador C_2 . Después para los condensadores C_1 y C_2 en paralelo y finalmente para C_1 y C_2 en serie.

5. Resultados

Al ser la tensión en los bornes del condensador proporcional a su carga, la tensión variará en el tiempo según la ley:

$$V_c = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12)$$

Represente para los cuatro casos estudiados la tensión del condensador frente al tiempo transcurrido. Determine el valor de la constante de tiempo τ en cada caso, determinando sobre las gráficas anteriores

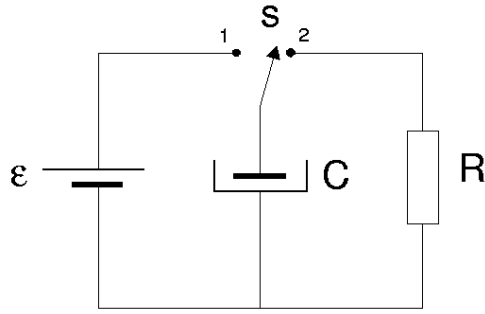


Figura 6: Esquema teórico del circuito

para qué valor del tiempo la tensión ha caído a un 37% del valor inicial. Finalmente determine en cada caso el valor de las capacidades C_1 , C_2 , C_s (equivalente de la asociación en serie de las anteriores) y C_p (equivalente de la asociación en paralelo).

Si tomamos logaritmos neperianos a ambos lados de la ecuación 12, se obtiene que:

$$\ln V_c = \ln V_0 - \frac{t}{\tau} \quad (13)$$

de manera que la representación de $\ln V_c$ frente al tiempo es una recta cuya pendiente es la constante de tiempo y cuyo término independiente es el logaritmo neperiano de la tensión inicial.

Construya, pues para cada uno de los cuatro casos estudiados una tabla donde figure el logaritmo neperiano de la tensión del condensador frente al tiempo transcurrido, y haga las correspondientes representaciones gráficas. A partir de éstas, determine nuevamente el valor de las constantes de tiempo y de las capacidades.

Por último compruebe que se cumplen las leyes de asociación de los condensadores, esto es, que los resultados obtenidos verifican las ecuaciones:

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (14)$$

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (15)$$

Resistencia interna de un voltímetro. FEM de una pila

1. Objetivo

Determinar la resistencia interna de un voltímetro

2. Material

Una fuente de tensión, un interruptor, un voltímetro y un potenciómetro o conjunto de resistencias .

3. Fundamento teórico

En el circuito de la figura 1, si aplicamos la ley de Ohm, siendo ε la fem de la batería, R la resistencia seleccionada mediante el conmutador, V la tensión medida en el voltímetro y r la resistencia interna de éste, tendremos

$$\varepsilon = V + Ri = (r + R)i = (r + R)\frac{V}{r} \quad (1)$$

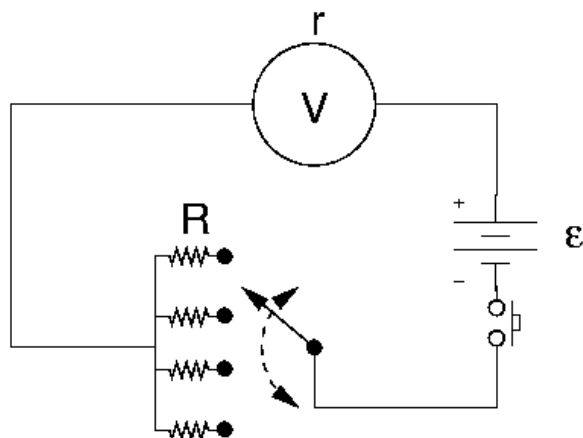


Figura 1: Esquema del circuito que ha de montar. Note que parte de él ya se halla montado en una caja.

Notemos que podemos despejar $1/V$, resultando:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\varepsilon r}R + \frac{1}{\varepsilon} \quad (2)$$

La representación de $1/V$ en función de R , da una recta de ordenada en el origen $1/\varepsilon$ y pendiente $1/\varepsilon r$. Así que de la ordenada en el origen se puede determinar ε y de la pendiente r .

4. Método experimental

Montar el circuito de la figura utilizando como elemento de carga el voltímetro. En la figura 2 se muestra el esquema de la parte del circuito que se halla montada en la caja que se le proporciona. Sólo queda conectar el voltímetro en los correspondientes bornes.

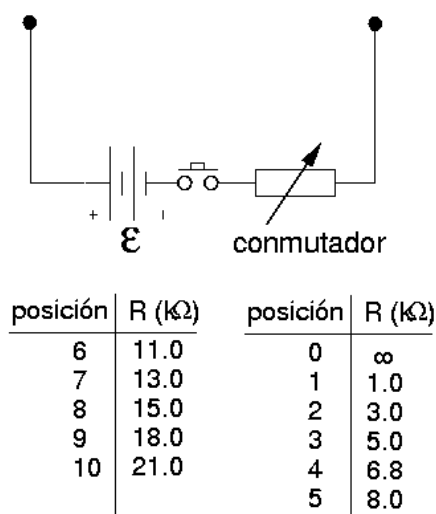


Figura 2: Este es la parte del circuito que hay montada en la caja. Por lo tanto solo resta conectar el voltímetro en los bornes correspondientes.

Tomar un valor de la resistencia variable mediante el conmutador, cerrar el circuito apretando el interruptor y anotar el valor del potencial que indica el voltímetro. Repetir la experiencia para los demás valores de la resistencia. Este procedimiento permitirá construir una tabla con los valores de V en función de R .

5. Resultados

A partir de la tabla anterior construir el gráfico $1/V = f(R)$ que representa la ecuación 2. Determinar, a partir del gráfico, los valores de ε ($1/\varepsilon$ es la ordenada en el origen) y r (a partir de la pendiente y del valor calculado anteriormente de ε)

Puente de Wheatstone. Medida de resistencias

1. Objetivo

Determinar el valor de dos resistencias y los valores de las resistencias equivalentes a su asociación en serie y en paralelo.

2. Material

Caja de resistencias. Fuente de alimentación. Panel de conexiones. Galvanómetro. Hilos de conexión con clavijas. Varias resistencias.

3. Fundamento teórico

En la técnica de medidas eléctricas se presenta a menudo el problema de la medida de resistencias. Para estas medidas existen diversos métodos, entre los que se puede elegir el más adecuado en función de la magnitud de la resistencia a determinar. Según sus valores las resistencias se pueden clasificar en pequeñas (inferiores a 1Ω), medias (entre 1Ω i $1 M\Omega$) y grandes (superiores a $1 M\Omega$).

Los puentes constituyen sistemas comunes para la determinación de resistencias e impedancias en general. A continuación mostraremos los aspectos generales del funcionamiento de los puentes, tanto de los de corriente continua como de los de corriente alterna. Después pasaremos a presentar los aspectos específicos del puente de Wheatstone

3.1. Métodos de cero: puentes

Los métodos de medida denominados de cero ofrecen la máxima precisión y, por tanto, son los más utilizados en laboratorios y en aquellos casos en los que se requiere alta precisión. En los métodos de cero (también denominados de puente) se obtiene el valor del parámetro a determinar mediante su comparación con los valores de patrones regulables. La comparación será válida en el momento en el que el instrumento indicador acuse corriente nula en una rama determinada del circuito de medida. Esta característica hace que los resultados obtenidos por este método no se vean afectados por la calibración del instrumento indicador, y que su exactitud dependa únicamente de la sensibilidad de dicho instrumento.

Así, un puente será un dispositivo fundamentado en la reducción a cero de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito constituido por dos ramas en paralelo. Las caídas de potencial en ambas ramas son originadas por una única fuente de potencial, de manera que los resultados de la medida serán independientes del valor de la tensión de alimentación.

Se denomina puente a un cuádrupolo en el cual se ha conectado la fuente a un par de bornes y el indicador de equilibrio al otro par. La figura 1 muestra un esquema habitual de un puente de cuatro brazos. El indicador de equilibrio (señalado con G) puede ser un instrumento de medida muy sensible, en este caso un galvanómetro.

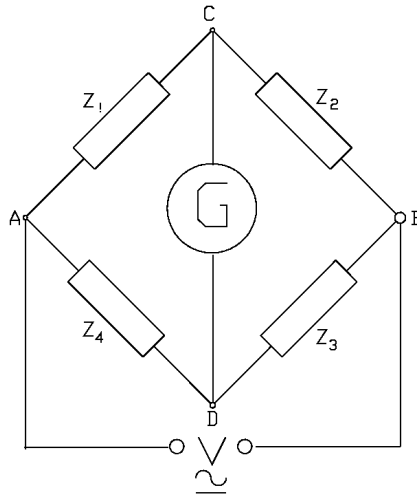


Figura 1: Esquema de puente de cuatro brazos

Estos puentes consisten en cuatro impedancias Z_1 , Z_2 , Z_3 y Z_4 . La fuente de alimentación está conectada entre los puntos A y B, y el indicador de equilibrio entre los puntos C y D. El procedimiento de medida consiste en modificar uno o más parámetros del circuito hasta que la diferencia de potencial entre A y D se haga cero. En esta situación, se verifican unas relaciones entre los componentes del puente que permiten calcular una impedancia en función de las impedancias conocidas. El tipo de alimentación de los puentes permite clasificarlos en puentes de corriente continua y puentes de corriente alterna.

Puentes de corriente continua

Los puentes de corriente continua tienen resistencias en sus ramas y son utilizados para determinar resistencias desconocidas. Para la medida de resistencias de valor medio se utiliza el puente de Wheatstone; en el caso de resistencias muy pequeñas el puente Kelvin (o puente Thomson).

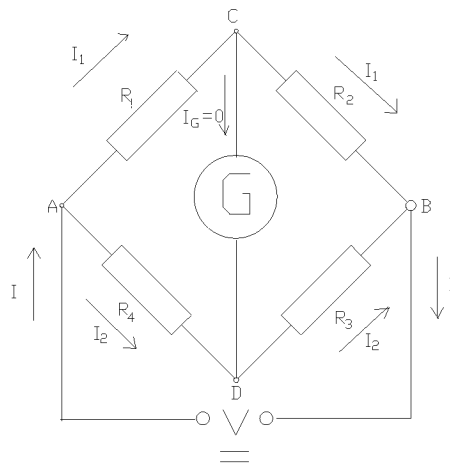


Figura 2: Esquema de puente de corriente continua

La figura 2 muestra un puente de corriente continua equilibrado. Esta situación se consigue cuando no hay corriente entre los puntos C y D, lo que sucede cuando la diferencia de potencial entre estos puntos se hace cero ($U_{CD}=0$). En este caso se verifican las siguientes relaciones para las caídas de tensión:

$$U_{AC} = U_{AD} \quad \text{y} \quad U_{CB} = U_{DB} \quad (1)$$

En el nudo A, las intensidades de corriente se distribuyen según el lema de Kirchoff: $I = I_1 + I_2$. Consecuentemente tenemos:

$$U_{AC} = I_1 R_1; \quad U_{AD} = I_2 R_4; \quad U_{CB} = I_1 R_2 \quad \text{y} \quad U_{DB} = I_2 R_3 \quad (2)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las anteriores obtenemos la condición de equilibrio del puente:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (3)$$

La condición de equilibrio permite determinar el valor de la resistencia desconocida; si suponemos que la resistencia desconocida es R_1 , equilibrando el puente la podemos obtener como:

$$R_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3} \quad (4)$$

Puentes de corriente alterna

A diferencia de los puentes de corriente continua, existen una gran variedad de puentes de corriente alterna. Utilizando puentes de corriente alterna se pueden determinar valores de resistencias, inductancias, capacidades, ángulos de pérdidas y frecuencias. En los puentes de corriente alterna el cuadripolo está formado por 4 impedancias, que pueden ser resistencias, capacidades, inductancias o cualquier combinación entre ellas. Por este motivo el equilibrado de estos puentes es más difícil.

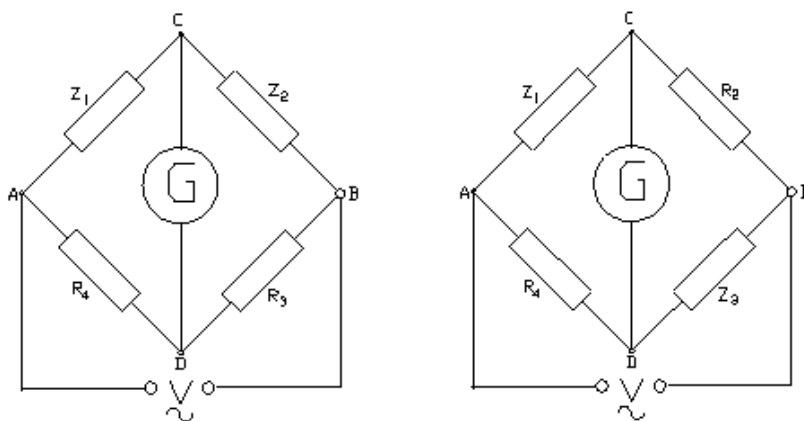


Figura 3: Esquemas de puentes de corriente alterna

La condición de equilibrio se puede escribir en este caso como:

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (5)$$

En el caso más general de que todas las impedancias tengan carácter reactivo y resistivo, tenemos que cualquiera de las impedancias se puede expresar $Z_\alpha = R_\alpha + j X_\alpha$, donde $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de equilibrio obtenemos:

$$(R_1 + j X_1)(R_3 + j X_3) = (R_2 + j X_2)(R_4 + j X_4) \quad (6)$$

Igualando las partes reales e imaginarias entre sí, resultan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_1 R_3 - X_1 X_3 &= R_2 R_4 - X_2 X_4 \\ R_1 X_3 - X_1 R_3 &= R_2 X_4 - X_2 R_4 \end{aligned}$$

La existencia de dos ecuaciones simultáneas indica que es necesario la verificación de dos condiciones. Por este motivo, es más difícil obtener el equilibrado de un puente de corriente alterna que uno de corriente continua.

La mayoría de los puentes de corriente alterna constan de dos impedancias y dos resistencias, las cuales pueden estar en ramas adyacentes o en ramas opuestas. Consideremos estos dos casos, para los que es más sencillo el proceso de equilibrado. Si queremos determinar el valor de la impedancia Z_1 y el puente se conecta según el esquema de la izquierda en la figura 3, el puente se equilibra cuando:

$$Z_1 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_3} = R_1 + j X_1 = \frac{(R_2 + j X_2) R_4}{R_3} = \frac{R_4}{R_3} R_2 + j \frac{R_4}{R_3} X_2 \quad (7)$$

De manera que el equilibrio puede tener lugar cuando los signos de los términos imaginarios son iguales, es decir, cuando la impedancia que se quiere determinar y Z_2 tienen el mismo carácter, inductivo o capacitivo. En el caso de utilizar el dispositivo del esquema de la derecha de la figura 3, el equilibrio se consigue cuando:

$$Z_1 = \frac{Z_2 Z_4}{Z_3} = R_1 + j X_1 = \frac{R_2 R_4}{R_3 + j X_3} = \frac{R_2 R_4 R_3}{R_3^2 + X_3^2} - j \frac{R_2 R_4 X_3}{R_3^2 + X_3^2} \quad (8)$$

Así, en este caso, se puede equilibrar el puente, y determinar Z_1 , si ésta y la impedancia patrón Z_3 tienen diferente carácter reactivo (una inductivo y la otra capacitivo o al revés).

3.2. Puente de Wheatstone

El puente de Wheatstone es el primer tipo de puente de medida que se utilizó y es también el de uso más frecuente. Es un puente de corriente continua que se utiliza para medir resistencias de valor medio y que fue ideado por S. H. Christie el año 1833 e introducido por C. Wheatstone en 1843. El esquema de conexión se puede ver en la figura 4.

La situación representada en la figura 4 es la del puente equilibrado. En esta situación, el galvanómetro indica el paso de una corriente nula. La condición de equilibrio, por lo tanto, es $U_{CD}=0$, lo cual requiere unas relaciones entre las caídas de tensión:

$$U_{AC} = U_{AD} \quad U_{CB} = U_{DB} \quad (9)$$

Tal y como se indica en la sección sobre los aspectos generales de los puentes, estas condiciones dan una relación para las resistencias en el puente equilibrado dada por:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (10)$$

Así, esta relación permite determinar el valor de una de las resistencias, dados los valores de las otras, una vez el puente se halla equilibrado.

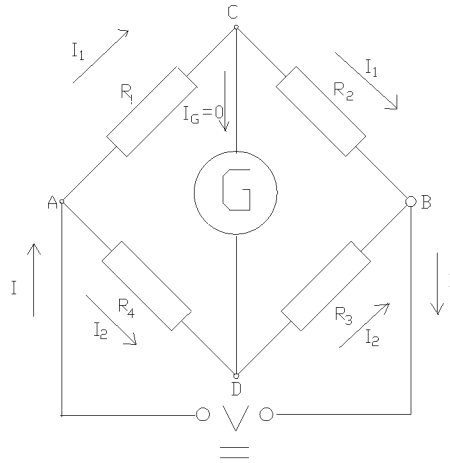


Figura 4: Esquema de un puente de Wheatstone equilibrado

4. Método experimental

Monte un puente de Wheatstone con los elementos de los que dispone, de manera que resulte la configuración de la figura 5. El equilibrado del puente se consigue modificando el valor de la resistencia de la caja de resistencias, R_c , hasta que el instrumento de medida indique el paso de una corriente nula (si es un galvanómetro) o una diferencia de potencial nula (si es un voltímetro).

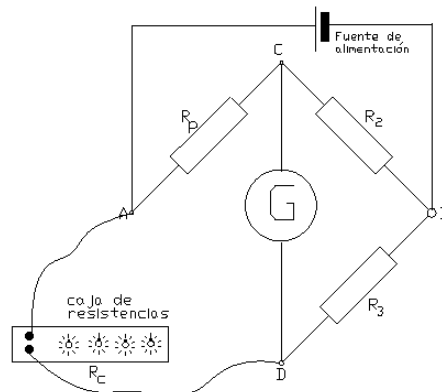


Figura 5: Esquema del puente que debe montar

Cuando el puente se halla equilibrado, de la ecuación 10 se deduce que el valor de la resistencia problema, R_p , vale:

$$R_p = \frac{R_2}{R_3} R_c \quad (11)$$

Así, en este montaje R_c actúa como resistencia de comparación y las resistencias R_2 y R_3 como resistencias de proporción.

En el material del que dispone se hallan varias resistencias de valor conocido que puede utilizar como

resistencias de proporción y dos resistencias de valor desconocido de las que deberá determinar su valor y el valor de las resistencias equivalentes de su asociación en serie y en paralelo.

5. Resultados

Para determinar el valor de la resistencia problema R_a construya la tabla siguiente:

R_2					
R_3					
R_c					
R_a					

En cada una de las columnas realizará la determinación de R_a a partir de la expresión 11 con una combinación diferente de valores de las resistencias de proporción. A partir de la muestra de valores de R_a que ha obtenido calcule el valor de su magnitud y su error.

Repita el proceso con la resistencia problema R_b , con la resistencia R_s , que resulta de asociar ambas resistencias problema en serie y, finalmente, con la resistencia R_p , que resulta de la asociación de las mismas en paralelo.

Por último, compruebe que los cuatro valores encontrados verifican las leyes de asociación de resistencias dentro de los intervalos de error encontrados.