análisis factorial corriente. Las variables no experimentales, que constituyen un grave problema en el análisis factorial, siempre aparecen en el análisis de regresión múltiple. En el capítulo 36 nos ocuparemos otra vez de este tema.

Guías de estudio

1. En líneas siguientes presentamos algunos estudios psicológicos o educativos interesantes que han utilizado el análisis factorial de la varianza, en una forma u otra. Conviene que el lector estudie dos de ellos y se pregunte: ¿fue el análisis factorial el más apropiado en esta situación?, esto es, ¿los investigadores pudieron haber usado una forma más sencilla de análisis?

Carlsmith, J., and Gross, A. "Some Effects of Guilt on Compliance." *Journal of Personality and Social Psychology*, XI (1969), 232-239.

Coop, R., and Brown, L. "Effects of Cognitive Style and Teaching Method on Categories of Achievement." *Journal of Educational Psychology*, LXI (1970), 400-405.

Scandura, J. "Learning Verbal and Symbolic Statements of Mathematical Rules." *Journal of Educational Psychology*, LVIII (1967), 356-364.

Staats, A., and Staats, C. "Attitudes Established by Classical Conditioning." *Journal of Abnormal and Social Psychology*, LVII (1958), 37-40.

Tallmadge, G., and Shearter, J. "Interactive Relationships Among Learner Characteristics, Types of Learning, Instructional Methods, and Subject Matter Variables." *Journal of Educational Psychology*, LXII (1971), 31-38.

2. Supongamos que un investigador hizo un experimento en el cual sometió a prueba dos métodos de enseñanza, A_1 y A_2. La segunda variable independiente fue la clase social: clase media y clase trabajadora, B_1 y B_2. La variable independiente fue aprovechamiento. Los resultados se resumen de este modo:

		Métodos A_1	A_2	
Clase social	B_1	78	70	74
	B_2	72	60	66
		75	65	($M_t = 70$)

El efecto de A fue significativo al nivel de .01, al igual que B. La interacción no fue significativa.

a) Interprete los resultados específicamente y comente las diferencias entre las medias, y las relaciones que supuestamente reflejan.

b) Haga una gráfica de resultados, e interprétela.

3. Utilice de nuevo la guía de estudio número dos, pero suponga ahora que las cifras tabuladas son distintas:

	A_1	A_2	
B_1	70	78	74
B_2	72	60	66
	71	69	($M_t = 70$)

El único cambio es que las medias de A_1B_1 y A_2B_1 se intercambiaron. (Por supuesto, las medias marginales en la zona inferior del cuadro se cambiaron.)

Así, el análisis factorial de la varianza muestra que en esta ocasión las muestras de A no son significativamente distintas, y las medias de B (como antes) son significativamente distintas. La interacción es también significativa.

a) Interprete los resultados y compare la interpretación con la del problema 2.

b) Elabore una gráfica e interprétela. Compárela con la que se obtuvo en el problema 2.

c) ¿Qué utilidad tendría el análisis factorial de la varianza en situaciones experimentales semejantes a ésta? ¿Podría llegar usted a las mismas conclusiones, con dos experimentos independientes? Por ejemplo, supongamos que el investigador hizo dos experimentos, uno con sujetos de clase media y otro con sujetos de clase trabajadora. ¿Cuáles habrían sido los resultados? ¿Por qué?

4. Nos interesa someter a prueba la eficacia relativa de diferentes métodos de enseñanza de idiomas extranjeros (o cualquier otro tema). Pensamos que la aptitud para aprender una lengua extranjera posiblemente sea la variable de influencia. ¿En qué forma podría planearse un experimento para someter a prueba la eficacia de los métodos? Agreguemos ahora una tercera variable (sexo), y planteemos los paradigmas de ambas investigaciones. Comente la lógica de cada diseño, desde el punto de vista estadístico. ¿Qué pruebas estadísticas de significación usaría usted? ¿Qué intervención tendrían en la interpretación de los resultados?

5. Escriba dos problemas y las hipótesis en que se basan, usando tres o cuatro variables, a su elección. Investigue los problemas y las hipótesis de las guías de estudio dos y tres del capítulo 2, y las variables del capítulo 3; o también use cualquiera de las variables de este capítulo. Escriba cuando menos una hipótesis sobre la interacción.

6. De los números aleatorios del Apéndice D extraiga 40, del cero al nueve, en grupos de 10. Considere que los cuatro grupos son A_1B_1, A_2B_1, A_1B_2, A_2B_2.

a) Haga el análisis factorial de la varianza como señalamos en este capítulo. ¿A qué se asemejarán las razones F de la interacción respecto a A, B y $A \times B$?

b) Sume tres unidades a cada una de las cifras del grupo con la media mayor. ¿Qué razón o razones F se modificarán? ¿Por qué? Haga el análisis factorial de la varianza. ¿Se han cumplido sus expectativas?

c) Tome uno de los problemas e hipótesis del punto cinco, y suponga que los resultados de *(b)* se aplican y son válidos al problema y la hipótesis. Interprete los "resultados".

CAPITULO 15

Análisis de varianza: grupos correlacionados

Supongamos que un investigador desea someter a prueba los efectos de la marihuana y el alcohol, en la conducción de vehículos.(1) Por supuesto, puede preparar un diseño de análisis de varianza simple o factorial, asignar aleatoriamente a los sujetos a los grupos de experimentación y hacer su experimento. Sin embargo, en vez de lo anterior, decide usar a los sujetos como sus propios controles, esto es, cada sujeto es sometido a tres tratamientos experimentales: marihuana (A_1), alcohol, (A_2) y control (A_3); después de someterlos a estas variables, cada uno maneja un simulador de conducción de vehículos. El número de errores en la conducción de vehículos es la variable dependiente. El cuadro 15-1 es un paradigma del diseño del experimento, con fluctuaciones ficticias. Note el lector que las sumas de columnas y filas aparecen en el cuadro. También advierta que el diseño se asemeja al del análisis de varianza simple, con una excepción: se incluyen las sumas de los renglones, que son las sumas de las puntuaciones de cada sujeto, en los tres tratamientos.

La situación anterior es radicalmente distinta de los modelos en los cuales asignamos sujetos aleatoriamente a los grupos de experimentación. En este caso, todos los sujetos son sometidos a los tres tratamientos y, en consecuencia, cada sujeto es su propio control, por así decirlo. De manera más general, en vez de independencia tenemos ahora dependencia o correlación entre grupos. ¿Qué significa correlación entre grupos? No es fácil explicarla con una simple definición.

Definición del problema

En el análisis de varianza simple y en el factorial, la condición básica de los diseños es que los grupos, sujetos y observaciones sean independientes. En ambos procedimientos los sujetos son asignados aleatoriamente a grupos experimentales y, por definición, no hay ni la más mínima sombra de correlación entre los grupos, salvo las variables incluidas específicamente en el diseño, como la adición de la variable "sexo" a los tratamientos, la varianza debida a diferencias individuales está distribuida en forma aleatoria entre los grupos experimentales y, de este modo, los grupos están "igualados". Se sabe que la magnitud de la varianza producida por las diferencias individuales es bastante grande y, si puede aislarse y substraerse de la varianza total, aumentará notablemente la precisión, porque tal fuente de variación en los puntajes puede restarse de la varianza total. De este modo, se crea una varianza menor debida a error, que se usa para valorar los efectos de los tratamientos.

En el capítulo 14 restamos la suma de cuadrados debida a la clase social, en un diseño factorial (véanse las ecuaciones 14.1 a 14.4), y de este modo, disminuimos la varianza intragrupos, que es el término correspondiente al error. Los razonamientos de este capítulo serán los mismos: aislar y substraer la varianza causada por diferencias individuales que esté presente en la variable dependiente. Para concretar este comentario abstracto emplearemos un ejemplo sencillo en el cual introduciremos la idea de "apareamiento" que consiste en usar los mismos sujetos en distintos grupos experimentales e igualarlos en cuanto a una, dos o más variables, es decir, entraña la misma idea básica de correlación entre grupos.(2)

Ejemplo ficticio

El director de una escuela y los miembros de su personal decidieron poner en práctica por vez primera un programa de educación sobre relaciones entre grupos, como adición al plan de estudios, pero uno de los problemas que surgieron fue el empleo de cintas cinematográficas. En las fases iniciales del programa se proyectaron las cintas, pero los resulta-

(1) La idea y algunos de los datos de este ejemplo provinieron de un estudio real: A. Crancer y col., "Comparison of the effects of Marihuana and alcohol on Simulated Driving Performance," *Science*, CLXIV (1969), 851-854.

(2) En el ejemplo que presentaremos, el apareamiento se emplea para demostrar la aplicabilidad del análisis de grupos correlacionados en una situación experimental común, porque el apareamiento probablemente es un poco más fácil de comprender, y así es posible esclarecer mejor algunos puntos sobre la correlación y su efecto. Sin embargo, el lector debe recordar siempre que las ideas básicas son las mismas en ambos tipos de diseño y análisis. Ahondaremos más este asunto. Otro aspecto que se debe recordar es que cuando mencionamos correlación entre grupos, tratamos de significar que existe una correlación positiva.

Cuadro 15-1. Diseño de un experimento en el que se utilizaron marihuana, bebidas alcohólicas y un simulador de conducción de vehículos: mediciones repetidas (puntuaciones ficticias)

Sujetos	*Marihuana (A_1)*	*Alcohol (A_2)*	*Testigo (A_3)*	*Sumas, renglones*
1	18	27	16	61
2	24	29	21	74
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
36	21	25	20	66
Sumas	710	820	680	$\Sigma X_t = 2210$

dos no fueron muy alentadores. El profesorado propuso la hipótesis de que el fracaso con las cintas se debía a que no se hizo esfuerzo particular alguno para destacar las posibles aplicaciones de la cinta, a las relaciones intergrupos. Decidieron someter a prueba la hipótesis de que la exhibición de las películas seguida de una discusión, mejoraría la actitud de los asistentes hacia miembros de grupos minoritarios, en mayor grado que el simple hecho de ver las películas.

Con base en un estudio preliminar, el profesorado seleccionó en forma aleatoria a un grupo de miembros del estudiantado, y formó 10 parejas, de tal forma que uno y otro miembros estuvieran apareados en cuanto a inteligencia y medio socioeconómico, y que también cada pareja se asemejara en mayor grado posible a la otra, en cuanto a los mismos parámetros, esto es, inteligencia y medio socioeconómico. La idea en que se basó el experimento fue que la inteligencia y el medio socioeconómico guardaban relación con actitudes hacia grupos minoritarios. Cada miembro de cada pareja fue asignado en forma aleatoria al grupo de experimentación o al grupo de control, y después se proyectó a ambos grupos una nueva cinta cinematográfica sobre las relaciones intergrupos. Con el grupo A_1 (experimental) se efectuó una sesión de debate después de la proyección. Con el grupo A_3 (de control) no se hizo tal cosa. A ambos grupos se aplicó una prueba con una escala para medir actitudes hacia grupos minoritarios. Las puntuaciones sobre actitudes y los cálculos necesarios para el análisis de la varianza se describen en el cuadro 15-2.

En primer lugar, hagamos el análisis de varianza simple como si los investigadores no hubiesen igualado a sus sujetos. No prestaremos atención al método de igualamiento, y analizaremos las puntuaciones como si todos los sujetos hubieran sido asigna-

Cuadro 15-2. Puntuaciones de actitudes y cálculos para el análisis de la varianza (ejemplo ficticio)

	Grupos					
Pares	*A_1 (experimental)*		*A_2 (control)*		Σ	Σ^2
1	8	64	6	36	14	196
2	9	81	8	64	17	289
3	5	25	3	9	8	64
4	4	16	2	4	6	36
5	2	4	1	1	3	9
6	10	100	7	49	17	289
7	3	9	1	1	4	16
8	12	144	7	49	19	361
9	6	36	6	36	12	144
10	11	121	9	81	20	400
ΣX:	70		50		$\Sigma X_t = 120$	
$(\Sigma X)^2$:	4900		2500		$(\Sigma X_t)^2 = 14{,}400$	
M:	7		5		$\Sigma X_t^2 = 930$	
					$\Sigma(\Sigma)^2 = 1804$	

Cuadro 15-3. Tabla final del análisis de varianza, análisis simple de los datos ficticios del cuadro 15-2

Fuente	*df*	*s.s.*	*m.s.*	*F*
Varianza intergrupos (A_1, A_2)	1	20.00	20.0	1.89 (n.s.)
Varianza intragrupos	18	190.00	10.56	
Total	19	210.00		

Clave: *df*, = grados de libertad; *s.s.* = suma de cuadrados; *m.s.* = media de cuadrados; *n.s.* = no significativo.

dos en forma aleatoria a los dos grupos, sin importar su inteligencia y medio socioeconómico. Los cálculos necesarios son:

$$C = \frac{14{,}400}{20} = 720$$

$$\text{Total} = 930 - 720 = 210$$

$$\text{Varianza entre columnas } (A_1, A_2) = \left(\frac{4900}{10} + \frac{2500}{10}\right) - 720 = 20$$

El análisis final de la tabla de varianza de este caso se presenta en el cuadro 15-3. La razón F, de 1.89 no es significativa y, por esta razón, las medias de los dos grupos, 7 y 5, no difieren significativamente. La interpretación de estos datos hubiera hecho creer a los investigadores que el añadir la discusión a la proyección de la cinta no tenía efecto alguno, conclusión errónea. La diferencia en este caso es realmente significativa a nivel de .01. Supongamos que esta afirmación es verdadera; si *fuese* verdadera, el análisis debería incluir algún error en alguna de sus etapas.

Una disgresión aclaratoria

Cuando el investigador iguala los sujetos en cuanto a variables *con relación significativa con la variable dependiente*, introduce la correlación en el esquema estadístico. En el capítulo 14 vimos que a menudo era posible identificar y controlar una fracción mayor de la varianza total en una situación experimental, al establecer niveles de una o más variables supuestamente relacionadas con la variable dependiente. Por ejemplo, el establecimiento de dos o tres niveles de clase social permite al investigador identificar la varianza en las puntuaciones de la variable dependiente, debida a la clase social. Ahora cambiemos un poco las cosas. El igualamiento en este experimento en realidad estableció 10 niveles, uno para cada pareja. Los miembros de la primera pareja tuvieron cociente intelectual (IQ) de 130 y 132; los miembros de la segunda pareja, 124 y 125, y así sucesivamente, hasta la décima pareja, cuyos miembros tuvieron 89 y 92 puntos de cociente intelectual. Cada pareja (nivel) tiene una media diferente. Si la inteligencia guardara una correlación positiva muy grande con la variable dependiente, los pares de puntuaciones de la variable dependiente debieran reflejar el igualamiento en la inteligencia; esto es, los pares de cifras correspondientes a la variable dependiente deberían asemejarse más entre sí que a otras cifras de la variable dependiente. Según lo anterior, el igualamiento en cuanto a inteligencia ha introducido varianza entre las parejas en cuanto a la variable dependiente o *varianza entre filas*.

Consideremos otro ejemplo hipotético para destacar lo que ocurre cuando existe correlación entre conjuntos de puntuaciones. Supongamos que un investigador ha igualado a tres grupos de sujetos en lo tocante a inteligencia, y que ésta guardó correlación perfecta con la variable dependiente, "aprovechamiento de algún tipo". Esta es una situación muy poco probable, pero sigamos con el ejemplo para captar la idea. El primer trío de sujetos tuvo cocientes intelectuales de 141, 142 y 140; el segundo de 130, 126 y 128 y así sucesivamente, hasta el quinto trío de 82, 85 y 82. Si revisamos el orden por rangos de las columnas de los tres conjuntos de cifras veremos que son exactamente los mismos: 141, 130, . . . , 82; 142, 126, . . . , 85; 140, 128, . . . , 82. Dado que suponemos que $r = 1.00$ entre inteligencia y aprovechamiento, los órdenes por rangos de las cifras de aprovechamiento deben ser los mismos en los tres grupos. En la mitad izquierda del cuadro 15-4 presentamos las supuestas puntuaciones obtenidas en la prueba de aprovechamiento. Obsérvese que los órdenes por rangos de estas cifras ficticias desde los más elevados hasta los más bajos, se presentan entre paréntesis junto a cada cifra correspondiente al aprovechamiento. Adviértase también que los órdenes por rangos son los mismos en los tres grupos.

Supongamos ahora que la correlación entre inteligencia y aprovechamiento fuese aproximadamente de cero. En esta situación, sería imposible predecir los órdenes por rangos de las puntuaciones de aprovechamiento o, dicho de otra forma, las puntuaciones de aprovechamiento no estarían igualadas. Para simular la situación de una correlación cero, subdi-

Cuadro 15-4. Puntuaciones correlacionadas y no correlacionadas (ejemplo ficticio)

I. Grupos correlacionados				*II. Grupos no correlacionados*			
A_1	A_2	A_3	M	A_1	A_2	A_3	M
73 (1)	74 (1)	72 (1)	73	63 (2)	74 (1)	46 (5)	61.00
63 (2)	65 (2)	61 (2)	63	45 (5)	55 (3)	61 (2)	53.67
57 (3)	55 (3)	59 (3)	57	50 (4)	50 (4)	59 (3)	53.00
50 (4)	50 (4)	53 (4)	51	57 (3)	65 (2)	53 (4)	58.33
45 (5)	44 (5)	46 (5)	45	73 (1)	44 (5)	72 (1)	63.00
		$M_t = 57.80$					$M_t = 57.80$

vidamos los órdenes por rangos de las puntuaciones de la mitad izquierda del cuadro 15-4, con la ayuda de una tabla de números aleatorios. Después de extraer tres grupos de números del uno al cinco, redispongamos las cifras en las columnas, con base en los números aleatorios. (Después de hacer esta operación, todos los órdenes por rangos en las columnas serían 1, 2, 3, 4, 5.) El primer conjunto de números aleatorios fue 2, 5, 4, 3, 1. El segundo número de la columna A_1 se colocó en primer lugar. A continuación tomemos el quinto número de A_1 y pongámoslo en segundo término. Este proceso se continúa hasta que el número que estaba en primer lugar se transforma en el número del quinto lugar. El mismo método se usa en los otros dos grupos de números, pero con distintos grupos de números aleatorios. Los resultados finales se muestran en la mitad derecha del cuadro 15-4. Las medias de las filas también se presentan, al igual que los rangos de las puntuaciones de las columnas (entre paréntesis).

En primer lugar estudiemos los rangos de los dos grupos de puntuaciones. En la mitad izquierda del cuadro señalamos con I, las puntuaciones que están correlacionadas. Los rangos son los mismos en cada columna y por esta razón, la correlación promedio entre las columnas es 1.00. Los números de la mitad identificada por II son esencialmente aleatorios y tienen un aspecto totalmente distinto. Los 15 miembros de ambos grupos son exactamente los mismos, y también lo son los números en cada columna (sus medias). Sólo los números de las filas y, por supuesto, las medias de los mismos, son distintas. Analicemos los órdenes por rangos de la parte derecha. Entre ellos no se aprecian relaciones sistemáticas. La correlación promedio debe ser cero, aproximadamente, pues los números se mezclaron aleatoriamente. En realidad, la correlación es de .11.

Estudiemos ahora la variabilidad de las medias de las filas. Adviértase que la variabilidad de las medias de la mitad izquierda (I) es muchísimo mayor que la de la mitad derecha (II). Si los números fuesen aleatorios, la media esperada de cualquier fila sería la media general. Las medias de las filas de la mitad II se agrupan muy cerca de la media general de 57.80. La extensión del rango es $63 - 53 = 10$, pero las medias de los renglones de la mitad izquierda (I) no se agrupan tan cerca de 57.80, y su variabilidad es mucho mayor, como lo indica la diferencia (rango) $73 - 45 = 28$. Al calcular la varianza de los dos grupos de medias (llamada *varianza entre filas)* obtenemos 351.60 para la mitad izquierda I y 58.27 para la mitad derecha (II). La varianza de I es seis veces mayor que la de II. Esta gran diferencia es el efecto directo de la correlación que existe en las puntuaciones de I, pero no en las de II. Podría decirse que la varianza entre filas es un índice directo de las diferencias individuales. Conviene detenernos un momento y examinar este ejemplo, en especial el del cuadro 15-4, hasta que el lector tenga una idea perfectamente clara del efecto de la correlación en la varianza.

¿Cuál es el efecto del estimado de la varianza del error de puntuaciones correlacionadas? Sin duda, la varianza debida a la correlación es *sistemática*, y debe eliminarse de la varianza total, para obtener un estimado más preciso de la varianza debida al error. Por lo demás, el estimado de la varianza de error incluirá la varianza debida a diferencias individuales, y el resultado será demasiado grande. En el ejemplo del cuadro 15-4 sabemos que el método de "mezclado" ha ocultado la varianza sistemática producida por la correlación. Al reacomodar las puntuaciones se elimina la posibilidad de identificar esta varianza. Esta varianza persiste en las cifras del conjunto II, pero no puede substraerse. Para demostrar esto calculamos las varianzas del error correspondiente a I y II: la de I es 3.13; la de II, 149.79. Al eliminar de la varianza total la producida por la correlación, es posible aminorar notablemente el error y, como consecuencia, la varianza de error correspondiente a I es 48 veces menor que la correspondiente a II. Queda claro que es conveniente aislar e identificar la varianza cuando ésta es de importancia en los conjuntos de medidas.

Los datos de una investigación real no serán tan impresionantes como los del ejemplo anterior. Las correlaciones casi nunca equivalen a la unidad (1). Pero suelen exceder de .50 a .60. *Cuanto mayor sea la correlación, mayor será la varianza sistemática que puede extraerse de la varianza total, y en mayor grado puede disminuirse el error.* Este principio adquiere extraordinaria importancia no sólo en el diseño de investigación, sino también en la teoría y práctica de la medición. A veces es posible integrar la correlación en las puntuaciones y después restar la varianza proveniente de las cifras correlacionadas restantes. Por ejemplo, podemos obtener una medida "pura" de diferencias individuales al emplear los mismos sujetos en diferentes estudios. Obviamente, las puntuaciones del propio sujeto serán más semejantes entre sí que lo que serían en relación con las cifras de los demás.

Reexamen de los datos del cuadro 15-2

Analizaremos de nuevo los datos de la investigación ficticia del cuadro 15-2, para apreciar los efectos de las cintas cinematográficas en las actitudes hacia grupos minoritarios. En páginas anteriores calculamos la suma de cuadrados y la varianza intercolumnas, exactamente como se hace en el análisis de varianza simple. Observamos que cuando usamos este método, la diferencia entre las medias no fue significativa. Con base en los comentarios anteriores podemos suponer que si existe correlación entre los dos grupos de puntuaciones, la varianza debida a la correlación debe ser eliminada de la varianza total y, en consecuencia, del estimado de la varianza debida a error. Si la correlación es substancial, este procedimiento debe originar una diferencia: el error debe aminorarse en forma extraordinaria. La correlación entre los conjuntos de puntuaciones de A_1 y A_2 del cuadro 15-2 es .93. Esta cifra denota un alto grado de correlación y, por esta causa, si se calcula con precisión, el error será mucho menor que antes.

La operación adicional necesaria es sencilla. Simplemente sumamos las cifras en cada fila del cuadro 15-2 y calculamos la suma de cuadrados y la varianza entre filas. Elevamos al cuadrado la suma de cada fila y dividimos el resultado entre el número de puntuaciones en la fila, por ejemplo, en la primera fila $8 + 6 = 14$; $(14)^2/2 = 196/2 = 98$. Repetimos este método para cada fila, sumamos los cocientes, y después restamos el término de corrección C, con lo cual obtenemos la suma elevada de cuadrados entre filas. (Ya que el número de puntuaciones en cada fila siempre es dos, resulta más sencilla la adición de todas las sumas elevadas al cuadrado y su posterior división entre dos, en especial si se cuenta con una calculadora manual.)

$$\text{Suma de cuadrados y varianza entre filas } (1, 2, \ldots, 10) = \left[\frac{(14)^2 + (17)^2 + \cdots + (20)^2}{2}\right] - 720 = 902 - 720 = 182$$

Como indicamos, esta suma de cuadrados entre filas es una medida de la variabilidad debida a diferencias individuales.

De la suma total de cuadrados hemos restado la suma de cuadrados intercolumnas y entre filas. Ahora recurramos a una ecuación conocida:

$$ss_t = ss_b + ss_w \qquad (15.1)$$

Esta ecuación la empleamos en el análisis de varianza simple. El análisis del cuadro 15-3 es un ejemplo. Debemos modificar esta ecuación para adecuarla a la situación presente. Designaremos las sumas de cuadrados entre grupos ss_b, ahora por ss_c que significa "suma de los cuadrados de las columnas". Agregaremos la suma de cuadrados de las filas, ss_r, y daremos un nuevo nombre a ss_w, pues ya no representa la varianza intragrupos. (¿Por qué?) Ahora la llamaremos "ss_{res}" que significa la suma de cuadrados de los *residuos*. Como su nombre indica, la suma *residual* de cuadrados identifica a la suma de cuadrados que quedan después que se han restado, de la suma total de cuadrados, las sumas de cuadrados de columnas y filas. La ecuación se transforma en

$$ss_t = ss_c + ss_r + ss_{res} \qquad (15.2)$$

En resumen, hemos subdividido la varianza total en dos varianzas identificables o sistemáticas, y una varianza de error. Esta última es un estimado más preciso de la variación por error o aleatoria de las cifras, que el del cuadro 15-3.

En vez de substituir las puntuaciones en la ecuación, emprenderemos el análisis final y correcto de la tabla de varianza (cuadro 15-5). La razón F de las columnas ahora es $20.00/.89 = 22.47$, que es significativa a nivel de .001. En el cuadro 15-3, la razón F no era significativa. Esto constituye una diferencia. Puesto que la varianza intercolumnas es exactamente la misma, la diferencia depende de la disminución notable del término correspondiente a error, que ahora es de .89, cuando era de 10.56 en los cálculos anteriores. Al calcular la suma de cuadrados y la varianza correspondiente a los renglones, hemos podido disminuir el término correspondiente a error a 1/12 de su magnitud anterior. En esta situación, obviamente, la anterior varianza correspondiente a error, que era de 10.56, estaba notablemente incrementada. Volviendo al problema original, podemos decir que el hecho de añadir una discusión a la

Cuadro 15-5. Tabla final y completa del análisis de varianza (datos del cuadro 15-2)

Fuente	*df*	*s.s.*	*m.s.*	*F*
Varianza entre columnas (A_1, A_2)	1	20.	20.00	22.47 (.001)
Varianza entre filas (1, 2, · · · , 10)	9	182.	20.22	22.72 (.001)
Varianza residual	9	8.	.89	
Total	19	210.		

Clave: *df* = grados de libertad; *s.s.* = suma de cuadrados; *m.s.* = media de cuadrados.

proyección de la cinta cinematográfica, parece haber tenido un efecto significativo en las actitudes hacia los grupos minoritarios.

Otras consideraciones

Antes de pasar a otro ejemplo, necesitamos insistir en tres o cuatro puntos adicionales. El primero se refiere al término correspondiente al error y las varianzas intragrupos y residual. Cuando se calculan las varianzas de las columnas y los renglones, no es posible calcular la varianza intragrupos, pues, de hecho, sólo hay una cifra por celdilla. También debemos recordar que ambas varianzas de error, como se calcularon, *son sólo estimados de la varianza debida al error*. En el análisis simple, el único estimado posible es la varianza intragrupos. En la situación presente es posible un mejor estimado, "mejor" porque contiene menos varianza sistemática. Si es posible eliminar por resta la varianza sistemática, se hace, y lo pudimos observar con los datos del cuadro 15-2.

Un segundo punto es: ¿por qué no recurrir a la prueba *t*? La respuesta es sencilla: el investigador puede recurrir a ella si así lo desea. Si sólo trabaja con un grado de libertad, esto es, con dos grupos, $t = \sqrt{F}$, o $F = t^2$. La razón *t* de los datos del cuadro 15-5 es simplemente: $\sqrt{22.47} = 4.74$. Pero si el investigador trabaja con más de un grado de libertad, en vez de la prueba *t* debe emplear la prueba *F*. Aún más, el análisis de varianza aporta mayor información. El análisis del cuadro 15-5 nos indica que las diferencias entre las puntuaciones promedio de actitudes de los grupos experimental y de control, son significativas. Con la prueba *t* habríamos obtenido la misma información. Sin embargo, el cuadro 15-5 nos indica, con sencillez y claridad, que el igualamiento fue eficaz o que la correlación entre las cifras de la variable dependiente de los dos grupos es significativa. De no haber sido significativa la *F* entre filas habríamos sabido que el igualamiento no había sido satisfactorio, lo cual, de todas maneras, constituye información importante. Por último, una vez que el investigador conoce a fondo los cálculos del análisis de varianza los recordará con facilidad, en tanto que las ecuaciones empleadas para estimar el error estándar de las diferencias entre las medias parecen confundir al novato. (La fórmula sencilla que señalamos en páginas anteriores hubo que modificarla debido a la correlación.)

En tercer lugar, se pueden hacer pruebas post hoc de la significación de las diferencias entre las medias individuales y, por supuesto, de dos grupos. Son aplicables las pruebas de Scheffé y de otra índole.(3)

Por último, y de mayor importancia, los principios que comentamos en líneas anteriores son aplicables a diversas situaciones experimentales. Posiblemente su aplicación al igualamiento sea la de menor importancia, aunque la más fácil de comprender. Siempre que se usen los mismos sujetos y medidas repetidas, son válidos los principios comentados. Cuando en la investigación educacional se usan diferentes grupos escolares o escuelas, estos principios también son válidos: de los datos es posible extraer por substracción la varianza debida a diferencias en grupos escolares y escuelas. Por lo expuesto, puede recurrirse a los principios en cualquier investigación en que se utilicen diferentes tratamientos experimentales, en unidades distintas de una organización, institución o incluso de un área geográfica mayor, a condición de que estas unidades difieran en las variables de significación, para la investigación.

Para apreciar el significado de lo expuesto, imaginemos que los renglones de la mitad izquierda del cuadro 15-4 constituyen escuelas o grupos escolares diferentes en un sistema escolar; que las escuelas o grupos escolares difieren notablemente en cuanto a aprovechamiento, como lo indican las medias de los renglones, y que A_1, A_2 y A_3 son tratamientos experimentales en un estudio que se hace en cada una de las escuelas o grupos escolares (consúltese la guía de estudio 2).

(3) Consúltese: B. Winer, *Statistical Principles in Experimental Design*. Nueva York: McGraw-Hill, 1962, págs. 80 y sigs., y págs. 113 y sigs., y R. Kirk, *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*. Belmont, Calif.: Brooks/Cole, 1968, cap. 3.

El análisis de dos variables de varianza es útil para solucionar algunos problemas de medición, en especial en psicopedagogía, como apreciaremos en la octava parte de este libro. Las diferencias individuales son fuente constante de varianza que necesita ser investigada y analizada. Un buen ejemplo lo constituye su uso en el estudio de clasificadores y clasificaciones. Es posible separar la varianza de los clasificadores de la varianza de los objetos bajo clasificación. Se puede estudiar la precisión de los instrumentos de medición, porque la varianza de las preguntas puede separarse de la varianza de las personas que responden a ellas. Retomaremos innumerables veces a estos puntos importantes y los principios en que se basan.

Obtención de varianzas por resta

Para tener seguridad de que el lector comprende los temas que hemos tratado, repetiremos los ejemplos anteriores. En el cuadro 15-6 se presentan dos grupos de números, identificados por I y II. Cada conjunto contiene exactamente los mismos números y únicamente difieren en cuanto a su disposición. En I no existe correlación entre las dos columnas de números, y el coeficiente de correlación es exactamente de cero, lo que es análogo a la asignación aleatoria de sujetos a los dos grupos. En esta situación es aplicable el análisis de varianza simple. Por otra parte en II, los números A_3 han sido redispuestos de tal manera que exista correlación entre las cifras de A_1 y A_2 (conviene que el lector revise los órdenes por rangos), En efecto $r = 1.90$. En esta situación no es aplicable el análisis de varianza simple. Si se usara con los números del sistema II el resultado sería exactamente el mismo que se lograría con los números de I, pero en esta situación no tomaríamos en consideración la varianza debida a la correlación.

Los cálculos del cuadro 15-6 dan por resultado las sumas de cuadrados, excepto las sumas "residuales" de cuadrados que se obtienen por substracción. Como los cálculos son muy sencillos pasaremos directamente al análisis final de las tablas de varianza que se muestran en el cuadro 15-7. Las sumas de cuadrados correspondientes a totales, columnas y renglones, se colocan en el cuadro, con los grados exactos de libertad. Los grados de libertad entre filas son el número de filas, menos uno ($5 - 1 = 4$). Los grados de libertad residuales, a semejanza de los grados de libertad de la interacción en el análisis factorial de la varianza, se calculan al multiplicar los

Cuadro 15-6. Análisis de varianza de datos ficticios, distribuidos aleatoriamente y correlacionados

	I $r = .00$				II $r = .90$			
	A_1	A_2	Σ	Σ^2	A_1	A_2	Σ	Σ^2
	1	5	6	36	1	2	3	9
	2	2	4	16	2	4	6	36
	3	4	7	49	3	3	6	36
	4	6	10	100	4	5	9	81
	5	3	8	64	5	6	11	121
ΣX:	15	20	$\Sigma X_t = 35$		15	20	$\Sigma X_t = 35$	
$(\Sigma X)^2$:	225	400	$(\Sigma X_t)^2 = 1225$				$(\Sigma X_t)^2 = 1225$	
M:	3	4	$\Sigma X_t^2 = 145$				$\Sigma X_t^2 = 145$	
			$\Sigma(\Sigma)^2 = 265$				$\Sigma(\Sigma)^2 = 283$	

$$C = \frac{1225}{10} = 122.50$$

$$\text{Total} = 145 - 122.50 = 22.50$$

$$\text{Varianza entre columnas} = \frac{225 + 400}{5} - 122.50 = 2.50$$

$$\text{Varianza entre filas} = \frac{6^2 + 4^2 + \cdots + 8^2}{2} - 122.50 = 132.50 - 122.50 = 10$$

$$C = \frac{1225}{10} = 122.50$$

$$\text{Total} = 145 - 122.50 = 22.50$$

$$\text{Varianza entre columnas} = \frac{225 + 400}{5} - 122.50 = 2.50$$

$$\text{Varianza entre filas} = \frac{3^2 + 6^2 + \cdots + 9^2}{2} - 122.50 = 141.50 - 122.50 = 19$$

Cuadro 15-7. Tablas finales del análisis de varianza

		I ($r = .00$)			II ($r = .90$)		
Fuente	*df*	*s.s.*	*m.s.*	*F*	*s.s.*	*m.s.*	*F*
Varianza entre columnas	1	2.5	2.5	1. (*n.s.*)	2.5	2.50	10. (.05)
Varianza entre filas	4	10.0	2.5		19.0	4.75	
Varianza residual $C \times R$	4	10.0	2.5		1.0	.25	
Total	9	22.5			22.5		

grados de libertad entre columnas, por los grados de libertad entre filas: $1 \times 4 = 4$, o se restan los grados de libertad entre columnas y entre filas, de los grados de libertad totales: $9 - 1 - 4 = 4$. De manera similar, las sumas de cuadrados residuales se obtienen al restar, de la suma total de cuadrados, las sumas de cuadrados entre columnas y entre filas. En lo que corresponde a I, son: $22.5 - 2.5 - 10.0 = 10$; en lo que corresponde a II, $22.5 - 2.5 - 19.0 = 1$.

Estos análisis requieren poca elaboración. En particular adviértase que cuando existe correlación, la razón F entre columnas es significativa, pero cuando la correlación es cero, no lo es. Nótense también los términos de error. Para I ($r = .00$) es 2.5, y para II ($r = .90$), es de .25, una correlación *10* veces menor.

Eliminación de las fuentes sistemáticas de varianza

Usaremos ahora el método de resta que se estudió en el capítulo 6, para eliminar las dos fuentes sistemáticas de varianza en los dos grupos de puntuaciones. En primer lugar, eliminaremos la varianza entre columnas, por la corrección de cada media, de tal forma que sea igual a la media general de 3.5. Después, en forma similar corregiremos cada cifra en cada columna (como se hizo en los sistemas I y II en el cuadro 15-8).

Si ahora calculamos las sumas de cuadrados totales de los cuadros I y II, en ambos casos obtendremos 20. Comparemos este resultado con la cifra anterior, de 22.5. El método de corrección ha disminuido las sumas totales de cuadrados en 2.5, éstas son, por supuesto, las sumas de cuadrados entre columnas. Obsérvese de nuevo que el procedimiento de corrección no tuvo efecto alguno en la varianza dentro de cada uno de los cuatro grupos de puntuaciones, ni tuvo efecto alguno en las medias de las filas.

Eliminemos ahora la varianza de las filas, al hacer que la media de cada fila sea igual a 3.5, la media general, y sobre esta base, corregiremos las puntuaciones de las filas. Esto se puede apreciar en el cuadro 15-9, que debe estudiarse con cuidado. Adviértase que la variabilidad de ambos conjuntos de puntuaciones ha disminuido, pero ha decrecido todavía más la variabilidad del conjunto correlacionado (II). De hecho, las puntuaciones de II tienen un rango de sólo $4 - 3 = 1$, en tanto que el rango de las puntuaciones de I es $5 - 2 = 3$. El igualamiento de las puntuaciones en II y su correlación concomitante, nos permite, por medio del procedimiento de corrección, reducir formalmente el término de error al "corregir" la varianza debida a la correlación. La única varianza que queda ahora en las cifras sometidas a doble corrección, es la varianza residual, término muy apropiado. Es la varianza que queda después de haber eliminado las dos varianzas sistemáticas. Si calculamos las sumas totales de los cuadrados de I y II, advertiremos que son 10 y 1, respectivamente. Si calculamos las sumas de cuadrados *intragrupos*, como se hace en el análisis unidireccional de la varianza, observaremos que también son 10 y 1. Evidentemente, en las puntuaciones ya no hay varianza sistemática, y lo único que queda es la variación debida al error. El punto más importante por destacar es que la suma de cuadrados residual de las puntuaciones no correlacionadas es 10 veces mayor que la suma de cuadrados residual de las puntuaciones correlacionadas. En ambos grupos de puntuaciones se hizo exactamente la misma operación. Sin embargo, con las puntuaciones no correlacionadas no es posible extraer tanta varianza como en el caso de las puntuaciones correlacionadas.

Ejemplos de investigación

Transferencia de principios derivados individualmente

En un estudio en el que se comparó un grupo al que se le proveyeron *reglas dadas* para solución de problemas (problemas *G*), con otro al que no se le dieron reglas para solución o *soluciones derivadas* (problemas *D*), Haslerud y Meyers emplearon a los propios sujetos como control.(4) Les pidieron que resolvieran los problemas en las dos formas (el problema consistió en descifrar una clave) después de que los entrenaron en los dos métodos. Más tarde, los sometieron a una prueba que incluyó problemas

(4) G. Haslerud y S. Meyers, "The Transfer Value of Given and Individually Derived Principles," *Journal of Educational Psychology*, XLIX (1958), 293-298.

Cuadro 15-8. Eliminación de la varianza entre columnas por igualación de las medias y puntuaciones de las columnas

	I ($r = .00$)			II ($r = .90$)		
Corrección	.5	−.5		.5	−.5	
	A_1	A_2	M	A_1	A_2	M
	1.5	4.5	3.0	1.5	1.5	1.5
	2.5	1.5	2.0	2.5	3.5	3.0
	3.5	3.5	3.5	3.5	2.5	3.0
	4.5	5.5	5.0	4.5	4.5	4.5
	5.5	2.5	4.0	5.5	5.5	5.5
M:	3.5	3.5	$M_t = 3.5$	3.5	3.5	$M_t = 3.5$

G y *D*, y como resultado, se observó que los sujetos tuvieron un mejor rendimiento con los problemas *G* (situación en la cual se habían dado normas o reglas), que con los problemas *D* (con soluciones derivadas). Sin embargo, en una segunda verificación una semana más tarde, los resultados se invirtieron: *aumentaron* las puntuaciones de la prueba con problemas a los que no se habían dado soluciones *derivadas (D)*, en tanto que disminuyeron las puntuaciones en problemas para los que se habían dado reglas (D). Cada sujeto fungió como su propio control por así decirlo, dado que las puntuaciones analizadas (con pruebas *t*) fueron $D_2 - D_1$ y $G_2 - G_1$, es decir, puntuaciones diferenciales. En tanto que D_2 y D_1 correspondieron al número de claves correctas en la segunda y primera prueba, respectivamente, de problemas tipo "soluciones derivadas", G_2 y G_1, correspondieron a las puntuaciones de los problemas en los cuales se dieron reglas.(5)

Aprendizaje por conjuntos de isópodos

En una demostración interesante y eficaz del empleo de sujetos como sus propios controles, en la cual se empleó el análisis de varianza de dos variables y la verificación de la teoría del aprendizaje en organismos inferiores, Morrow y Smithson demostraron que los isópodos (pequeños crustáceos) pueden "aprender a aprender".(6) Muchos estudiantes, humanistas, sociólogos, educadores e incluso psicólogos han criticado a los teóricos del aprendizaje y a otros investigadores del campo de la psicología, por usar animales en su investigación. A pesar de que se pueden hacer algunas críticas legítimas a la investigación conductual y psicológica. La que se hace porque se emplean animales, forma parte de la irracionalidad frustrante, pero al parecer inevitable, que aqueja a todo esfuerzo humano. Dígase lo que se diga, la investigación con animales no deja de tener cierto encanto y por sí misma puede ser objeto de investigación científica.(7) Sea como sea, una de las razones para verificar hipótesis similares con diferentes especies es la misma por la cual el investigador repite estudios experimentales en diferentes partes del mundo: generalizar. Una teoría es mucho más válida y general si se confirma con personas u objetos en los cuatro puntos cardinales, con individuos de todas las nacionalidades, e incluso con animales de diversas especies. El estudio de Morrow y Smithson intentó aplicar la teoría del aprendizaje a organismos pequeños, en quienes podría ser válida la idea de que su aprendizaje es controlado por normas o leyes distintas de las del aprendizaje de seres humanos y ratas. Obtuvieron éxito parcial, cuando menos.

Adiestraron a ocho isópodos, mediante la privación de agua y reforzamiento ulterior, para una actuación apropiada (papel secante impregnado de agua), de tal forma que invirtieran sus "preferencias" respecto a un brazo u otro de un laberinto en T. Cuando los animalitos habían alcanzado un criterio específico de "vueltas" correctas en el laberinto, se invertía el aprendizaje, esto es, se reforzaba el cambio en la dirección hacia la otra rama del laberinto T,

(5) Los ejemplos de análisis experimental dados no implican obligadamente que los autores recomienden o apoyen los métodos de análisis usados. Por ejemplo, en el caso anterior es cuestionable el uso de puntuaciones diferenciales, que es una práctica común, pues siempre son menos fidedignas que las puntuaciones de las cuales se obtuvieron. Consúltese R. Thorndike y E. Hagen, *Measurement and Evaluation in Psychology and Education*, 3a. ed. Nueva York: Wiley, 1960, págs. 195-198, para una explicación más clara de los problemas en cuestión.

(6) J. Morrow y B. Smithson, "Learning Sets in an Invertebrate," *Science*, CLXIV (1969), 850-851.

(7) Bugelski ha escrito un argumento excelente en pro del uso de ratas en investigación del aprendizaje, que todo estudiante de investigación de la conducta debiera leer: B. Bugelski, *The Psychology of Learning*. Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1956, págs. 33-44. Otro estudio excelente sobre bases más amplias es el de D. Hebb y W. Thompson, "The Social Significance of Animal Studies." En G. Lindzey y E. Aronson, Eds., *The Handbook of Social Psychology*, 2a. ed. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1968, vol. II, págs. 729-774.

Cuadro 15-9. Eliminación de la varianza entre filas por igualación de medias y puntajes de las filas

	I ($r = .00$)				II ($r = .90$)		
Corrección	A_1	A_2	M	*Corrección*	A_1	A_2	M
+ .5	2.0	5.0	3.5	+ 2.0	3.5	3.5	3.5
+ 1.5	4.0	3.0	3.5	+ .5	3.0	4.0	3.5
0	3.5	3.5	3.5	+ .5	4.0	3.0	3.5
− 1.5	3.0	4.0	3.5	− 1.0	3.5	3.5	3.5
− .5	5.0	2.0	3.5	− 2.0	3.5	3.5	3.5
M:	3.5	3.5	(3.5)		3.5	3.5	(3.5)

Cuadro 15-10. Análisis de varianza de los datos de Morrow y Smithson

Fuente	*df*	*s.s.*	*m.s.*	*F*
Varianza entre columnas	9	3095.95	343.994	4.78 (.01)
Varianza entre filas	7	1587.40	226.771	3.15 (.01)
Varianza residual	63	4532.85	71.950	
Total	79	9216.20		

hasta que se alcanzaba el criterio. Esto se hizo con cada uno de los isópodos durante nueve "inversiones". La pregunta que surgió es: ¿los animales aprendieron a hacer las "inversiones" con mayor prontitud conforme avanzaba la prueba? El aprendizaje con estas características debería manifestarse por un número decreciente de errores.

Morrow y Smithson analizaron los datos por medio del análisis de varianza de dos variables. El número promedio de errores en la prueba inicial y las nueve pruebas de inversión disminuyó uniformemente: 27.5, 23.6, 18.6, 14.3, 16.8, 13.9, 11.1, 8.5, 8.6, 8.6. En el cuadro 15-10(8) se presenta el análisis de varianza correspondiente. Las 10 medias difirieron significativamente, dado que la razón F correspondiente a las columnas (pruebas inversas), esto es, 4.78, es significativa a nivel de .01. La razón F correspondiente a las filas 3.15, también es significativa a nivel de .01, lo cual demuestra que existe una correlación entre las columnas y, de este modo, diferencias individuales entre los isópodos. Es un detalle curioso saber que incluso los crustáceos pequeños muestran diferencias individuales.

(8) El autor de estas líneas hizo el análisis de varianza con base en los datos originales dados por Morrow y Smithson, en su tabla 1.

Guías de estudio

1. Haga el análisis bidireccional de la varianza con los dos grupos de datos ficticios del cuadro 15-6. Emplee el texto como ayuda, e interprete los resultados. Después, efectúe el análisis de varianza de dos variables de los dos grupos del cuadro 15-8, y también de las puntuaciones del cuadro 15-9. Disponga los datos en forma de tablas para el análisis final de varianza, y compare sus resultados. Medite con gran detenimiento la forma en que las correcciones de ajuste han modificado los datos originales.
2. Se pidió a tres sociólogos que juzgaran la eficacia general de los empleados administrativos de 10 escuelas de enseñanza primaria en un distrito escolar. Una de las medidas era flexibilidad en la administración (cuanto más alta fuese la puntuación, mayor sería la flexibilidad). Las 10 cifras de esta medida, de los tres sociólogos fueron:

	S_1	S_2	S_3
1	9	7	5
2	9	9	6
3	7	5	4
4	6	5	3
5	3	4	2
6	5	6	4
7	5	3	1
8	4	2	1
9	5	4	4
10	7	5	5

   a) Haga el análisis de varianza de dos variables como se describió en este capítulo.

   b) ¿Hay concordancia en las medias calculadas por los tres sociólogos? Uno de ellos aparentemente es riguroso en sus calificaciones.
   c) ¿Existen diferencias substanciales entre las escuelas? ¿Qué escuela parece tener la mayor flexibilidad administrativa? ¿Qué escuela tiene la menor flexibilidad?

   Respuestas: a) F (columnas) = 24.44 (.001); F (renglones) = 14.89 (.001); b) no; sí; c) sí; número dos y número ocho.
3. Extraiga 30 dígitos del 0 al 9 de una tabla de números aleatorios. (Use el Apéndice D de este libro, si así lo desea.) Divídalos arbitrariamente en tres grupos de 10 dígitos cada uno.
   a) Haga el análisis de varianza de dos variables. Suponga que los números en cada fila son datos de un individuo.
   b) Añada ahora constantes a los tres números de cada fila de esta forma: añada 20 al primer par de filas, 15 al segundo par, 10 al tercer par, cinco al cuarto par, y cero al último par de filas. Repita el análisis de varianza con estos "datos".
   c) De hecho: ¿qué hizo usted al "modificar" los números en los renglones, en la forma anterior?
   d) Compare la suma de cuadrados y las medias de cuadrados a) y b). ¿Por qué difieren las sumas *totales* de cuadrados y medias de cuadrados? ¿Por qué son las mismas las sumas entre columnas y *residuales* de las medias de cuadrados? ¿Por qué son diferentes las sumas entre filas de cuadrados y medias de cuadrados?
   e) Formule un problema de investigación con base en todos los datos anteriores e interprete los "resultados". ¿Es realista el ejemplo?